UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

52. BAND, 3. HEFT
(AUSGEGEBEN IM AUGUST 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

52. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Müller, H. R. Der Drall einer Regelfläche im elliptischen Raum 181

Emch, A. Neue durch stereographische Projektion erhaltene Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten 189

Bompiani, E. Monoidi del 3° ordine per una calotta superficiale del 4° ordine . 190

Funk, P. Beiträge zur zweidimensionalen Finsler'schen Geometrie 194

Mayrhofer, K. Über vollständige Maße 217

Antosiewicz, H. Über die Anwendungen des Vektorkalküls auf die Geometrie algebraischer Kurven 230

Hlawka, E. Eine asymptotische Formel für Potenzsummen komplexer Linearformen 248

Prachar, K. Zur Geometrie der Reihen 255

Buchbesprechungen 260

Der Drall einer Regelfläche im elliptischen Raum.

Von
Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 3. März 1947.)

Für eine windschiefe Regelfläche Ψ des Euklidischen Raumes wurde von *M. Chasles* der Begriff des *Verteilungsparameters* (Parameter de distribution) oder *Dralls* einer Erzeugenden e eingeführt[1]. Durchläuft die reelle Gerade e_1 die Regelfläche Ψ und ist e eine endliche Lage von e_1, dann wird für den Grenzübergang von e_1 nach e der

$$\lim_{e_1 \to e} \frac{\overline{ee_1}}{\overset{\frown}{ee_1}} = k \tag{1}$$

als Verteilungsparameter oder Drall definiert.

In der Grenze kann der Übergang von e_1 nach e immer als eine infinitesimale Schraubung aufgefaßt werden, für welche die Zentraltangente von e als Schraubachse und der Drall k von e als Schraubparameter (reduzierte Ganghöhe) fungieren. Das Vorzeichen von k kann mit dem Sinn der Schraubung in Zusammenhang gebracht werden. ($k > 0$ Linksschraubung.)

Der Satz von der Berührungskorrelation, nach dem das Büschel der Tangentialebenen einer Regelfläche Ψ in den Punkten einer Erzeugenden e projektiv zur Reihe der Berührungspunkte ist, findet seinen metrischen Ausdruck in der *Hamilton*schen Beziehung[2]

$$\overline{CX} = k \, tg \, \overset{\frown}{\gamma\xi} \tag{2}$$

wobei C der Zentralpunkt von e mit der Tangentialebene γ (Zentralebene) und X ein beliebiger Punkt von e mit der Tangentialebene ξ ist. Hieraus ergibt sich für zwei Punkte X und Y von e, deren Tangentialebenen ξ und η aufeinander senkrecht stehen,

---

[1] Vgl. etwa Enz. Math. Wiss., III D 5, Nr. 2 oder *J. L. Krames*, Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 37 (1928), S. 107—112.

[2] *W. R. Hamilton*, Theory of systems of rays, Trans. R. Ir. Ac., 15—17 (1828—37).

$$\overline{CX} \cdot \overline{CY} = -k^2 \tag{3}$$

Es bilden also die Paare von Punkten einer Erzeugenden e, deren zugehörige Tangentialebenen aufeinander senkrecht stehen, eine gleichlaufende Involution mit dem Zentralpunkt C von e als Zentrum und dem Drall von e als Potenz.

Schließlich gilt für das *Gauß*sche Krümmungsmaß K der Regelfläche im Punkte X der Erzeugenden e die Formel von *E. Lamarle*[3].

$$K = \frac{-k^2}{(k^2 + \overline{CX}^2)^2} \tag{4}$$

Im Zentralpunkt wird also $K_C = -\frac{1}{k^2}$.

Diese Begriffe und Sätze der Euklidischen Geometrie sollen im folgenden nun auf Regelflächen im elliptischen Raum ausgedehnt werden; hierzu wird der Formel- und Rechenapparat benützt, der auf genormten Quaternionen, alternierenden Differentialprodukten und äußeren Ableitungen aufgebaut ist[4].

Die einparametrige Geradenschar oder Regelfläche Ψ des elliptischen Raumes, die wir unserer Betrachtung zugrunde legen, werde von der Kante $G_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\}$ des begleitenden Polartetraeders $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ so beschrieben, daß die Geraden $G_1 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1\}$ und $G_1^* = \{\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ auch die benachbarte Erzeugende der Schar senkrecht schneiden. — Um nun zu einem Begriff zu gelangen, der dem Euklidischen Drall einer Erzeugenden entspricht, fassen wir jene infinitesimale Schraubung ins Auge, die G_3 in die benachbarte Erzeugende der Regelschar überführt und eine der beiden Zentraltangenten G_1 oder G_1^* von G_3 zur Schraubachse hat. Aus den zugehörigen Schieb- und Drehwinkeln werden wir den Drall der Erzeugenden G_3 bestimmen.

Im elliptischen Raum wird eine Schraubung um die Achse $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}']$, die einen Punkt $\mathfrak{P}$ in den Punkt $\hat{\mathfrak{P}}$ und eine Gerade $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ in die Gerade $[\hat{\mathfrak{r}}, \hat{\mathfrak{r}}']$ transformiert, in folgender Weise gegeben[5]:

---

[3] *E. Lamarle*, Théorie géom. des centres et axes inst. de rotation, Bull. Ac. sc. Bruxelles, 5., 6., 7. (1858—59).

[4] Vgl. *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie u. Mechanik, I, II, III. Hamb. Math. Einzelschr., 34. Heft (1942), sowie *H. R. Müller*, Über Striktionslinien von Kurven- u. Geradenscharen im elliptischen Raum. (Diese Zeitschrift, S. 138).

[5] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O., § 5.

$$\hat{\mathfrak{P}} = \bar{\mathfrak{Q}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}' \text{ bzw. } \hat{\mathfrak{r}} = \bar{\mathfrak{Q}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{Q},\ \hat{\mathfrak{r}}' = \bar{\mathfrak{Q}}'\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{Q}' \tag{5}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= \mathfrak{s}^{2\frac{\sigma}{\pi}} = \cos\sigma + \mathfrak{s}\sin\sigma,\ \mathfrak{s} + \bar{\mathfrak{s}} = 0,\ \nu\,\bar{\mathfrak{s}} = 1 \\ \mathfrak{Q}' &= \mathfrak{s}'^{2\frac{\sigma'}{\pi}} = \cos\sigma' + \mathfrak{s}'\sin\sigma',\ \mathfrak{s}' + \bar{\mathfrak{s}}' = 0,\ \mathfrak{s}'\,\bar{\mathfrak{s}}' = 1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und $\theta_1 = \sigma - \sigma'$ der Schiebwinkel und $\theta_2 = \sigma + \sigma'$ der Drehwinkel um die Achse $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}']$ bedeuten. Die Polare der Schraubachse, sowie diese selbst bleiben bei der Schraubung als Ganzes in Ruhe.

Ist $\hat{G}_3 = [\hat{\mathfrak{r}}_3, \hat{\mathfrak{r}}_3']$ die benachbarte Erzeugende von $G_3 = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$, so gilt[6]

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_3 &= \frac{\mathfrak{r}_3 + d\,\mathfrak{r}_3}{\sqrt{1 + (d\,\mathfrak{r}_3\,d\,\mathfrak{r}_3)}} = \frac{\mathfrak{r}_3 - \omega_1\,\mathfrak{r}_2}{\sqrt{1+\omega_1^2}} \\ \hat{\mathfrak{r}}_3' &= \frac{\mathfrak{r}_3' + d\,\mathfrak{r}_3'}{\sqrt{1 + (d\,\mathfrak{r}_3'\,d\,\mathfrak{r}_3')}} = \frac{\mathfrak{r}_3' - \omega_1'\,\mathfrak{r}_2'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Setzen wir (6) und (7) in (5) ein, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{r}_3 - \omega_1\,\mathfrak{r}_2}{\sqrt{1+\omega_1^2}} &= \mathfrak{r}_3\cos 2\sigma - 2\,(\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{s})\,\mathfrak{s}\sin^2\sigma + (\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{s})\sin 2\sigma \\ \frac{\mathfrak{r}_3' - \omega_1'\,\mathfrak{r}_2'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} &= \mathfrak{r}_3'\cos 2\sigma' - 2\,(\mathfrak{r}_3'\,\mathfrak{s}')\,\mathfrak{s}'\sin^2\sigma' + (\mathfrak{r}_3' \times \mathfrak{s}')\sin 2\sigma' \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{s} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_3\right\}$ das vektorielle Produkt der Vektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{s}$.

Wählen wir die Kante $G_1 = [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1']$, also die Zentraltangente im Zentralpunkt $\mathfrak{P}_0$ als Schraubachse $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}']$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{r}_3 - \omega_1\,\mathfrak{r}_2}{\sqrt{1+\omega_1^2}} &= \mathfrak{r}_3\cos 2\sigma + \mathfrak{r}_2\sin 2\sigma \\ \frac{\mathfrak{r}_3' - \omega_1'\,\mathfrak{r}_2'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} &= \mathfrak{r}_3'\cos 2\sigma' + \mathfrak{r}_2'\sin 2\sigma' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

oder

[6] Vgl. *H. R. Müller*, a. a. O., § 3.

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\sigma &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2}} \quad , \quad \sin 2\sigma = \frac{-\omega_1}{\sqrt{1+\omega_1^2}} \\ \cos 2\sigma' &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} \quad , \quad \sin 2\sigma' = \frac{-\omega_1'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wird jedoch die zweite Zentraltangente der Erzeugenden G_3, also die Kante $G_1^* = [\mathfrak{r}_1, -\mathfrak{r}_1']$ als Schraubachse gewählt, so vereinfacht sich (8) auf

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{r}_3 - \omega_1 \mathfrak{r}_2}{\sqrt{1+\omega_1^2}} &= \mathfrak{r}_3 \cos 2\sigma^* + \mathfrak{r}_2 \sin 2\sigma^* \\ \frac{\mathfrak{r}_3' - \omega_1' \mathfrak{r}_2'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} &= \mathfrak{r}_3' \cos 2\sigma^{*\prime} - \mathfrak{r}_2' \sin 2\sigma^{*\prime} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\sigma^* &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2}} \quad , \quad \sin 2\sigma^* = \frac{-\omega_1}{\sqrt{1+\omega_1^2}} \\ \cos 2\sigma^{*\prime} &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} \quad , \quad \sin 2\sigma^{*\prime} = \frac{+\omega_1'}{\sqrt{1+\omega_1'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Es ist somit $\sigma = \sigma^*$, $\sigma' = -\sigma^{*\prime}$.

Für die beiden infinitesimalen Schraubungen, die eine Erzeugende unserer Regelfläche in die benachbarte überführen, ergeben sich somit folgende Schieb- bzw. Drehwinkel:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \sigma - \sigma' = \text{Schiebwinkel} \\ \theta_2 &= \sigma + \sigma' = \text{Drehwinkel} \end{aligned}\right\} \text{ bezüglich } G_1 \text{ als Schraubachse}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_1^* &= \sigma + \sigma' = \text{Schiebwinkel} \\ \theta_2^* &= \sigma - \sigma' = \text{Drehwinkel} \end{aligned}\right\} \text{ bezüglich } G_1^* \text{ als Schraubachse.}$$

Die Rollen von Schieb- und Drehwinkeln vertauschen sich somit bei Übergang von einer Schraubachse zur anderen: $\theta_1 = \theta_2^*$, $\theta_2 = \theta_1^*$. In der Euklidischen Geometrie führt das Verhältnis von Schiebstrecke zum Drehwinkel in der Grenze zum Verteilungsparameter. Wir *definieren* daher

$$\frac{\sin 2\theta_1}{\sin 2\theta_2} = \frac{\omega_1 - \omega_1'}{\omega_1 + \omega_1'} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k_0 \tag{11}$$

als *Verteilungsparameter oder Drall hinsichtlich des Zentralpunktes* $\mathfrak{P}_0$, sowie den reziproken Wert

$$\frac{\sin 2\,\theta_1^*}{\sin 2\,\theta_2^*} = \frac{\sin 2\,\theta_2}{\sin 2\,\theta_1} = \frac{\omega_1 + \omega_1'}{\omega_1 - \omega_1'} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = k_3 \qquad (12)$$

als *Verteilungsparameter oder Drall in Bezug auf den Zentralpunkt* $\mathfrak{P}_3$ der Erzeugenden G_3.[7]

Das Verhältnis der Differentialformen α_1 und β_1 charakterisiert also obige infinitesimale Schraubung und damit den Drall der Erzeugenden G_3 in Bezug auf die beiden auf G_3 liegenden Zentralpunkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$. Diese Schieb- und Drehwinkel der infinitesimalen Schraubung, durch welche die Erzeugende $G_3 = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ in die benachbarte Erzeugende $\hat{G}_3 = [\hat{\mathfrak{r}}_3, \hat{\mathfrak{r}}_3']$ übergeht, stimmen mit den stationären Abständen dieser beiden Geraden überein. Wir finden θ_1 bzw. θ_2 als stationäre Abstände hinsichtlich der Zentralpunkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$.[8]

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0(u_2)\cos\varphi - \mathfrak{P}_3(u_2)\sin\varphi \qquad (13)$$

ist eine Parameterdarstellung der Punkte $\mathfrak{P}$ unserer Regelfläche Ψ; für $u_2 =$ konst. und $0 \leqq \varphi < \pi$ durchläuft $\mathfrak{P}$ die Erzeugende G_3.

Es gilt dann

$$d\mathfrak{P} = (\alpha_3 - d\varphi)(\mathfrak{P}_0 \sin\varphi + \mathfrak{P}_3 \cos\varphi) + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \cos\varphi + \beta_1 \mathfrak{P}_2 \sin\varphi$$

Die Tangentialebene unserer Fläche im Punkte $\mathfrak{P}$ kann durch Nullsetzen folgender Determinante erfaßt werden:

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3, d\mathfrak{P}, \mathfrak{X}) = (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3, \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \cos\varphi + \beta_1 \mathfrak{P}_2 \sin\varphi, \mathfrak{X}) = 0 \qquad (14)$$

Um die Schnittpunkte dieser Tangentialebene mit der Polaren $G_3^* = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2\}$ von $G_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\}$ zu ermitteln, treffen wir für den „laufenden" Punkt $\mathfrak{X}$ in der Gleichung (14) den Ansatz

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{P}_1 \cos\tau + \mathfrak{P}_2 \sin\tau$$

und gehen hiermit in (14) ein. Wir finden wegen $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) = 1$

$$\alpha_1 \cos\varphi \sin\tau - \beta_1 \sin\varphi \cos\tau = 0 \qquad (15)$$

wofür wir auch schreiben können:

$$tg\,\varphi = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.\, tg\,\tau = k_0\, tg\,\tau \qquad (16)$$

---

[7] In erster Näherung stellt auch der Quotient (11) das Verhältnis von Schieb- zu Drehwinkel dar:

$$\frac{\sin 2\,\theta_1}{\sin 2\,\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \ldots.$$

[8] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O., § 6.

Da φ der Abstand des Punktes $\mathfrak{P}$ vom Zentralpunkt $\mathfrak{P}_0$ ist, τ den Winkel der Tangentialebenen in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_0$ mißt und k_0 der Drall in Bezug auf $\mathfrak{P}_0$ ist, haben wir in (16) das elliptische Analogon zur metrischen Beziehung (2) des Euklidischen Raumes gefunden.

(16) kann auch in Hinblick auf den zweiten Striktionspunkt $\mathfrak{P}_3$ der Erzeugenden G_3 geschrieben werden, wenn wir durch $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ den Abstand der Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_3$ und durch $\bar{\tau} = \frac{\pi}{2} - \tau$ den Winkel bezeichnen, den die Tangentialebene in $\mathfrak{P}$ mit der Zentralebene in $\mathfrak{P}_3$ einschließt:

$$tg\,\bar{\varphi} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot tg\,\bar{\tau} = k_3\, tg\,\bar{\tau} \qquad \overline{(16)}$$

Bestimmen in (13) die Parameterwerte φ und φ^* zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$, deren zugehörige Tangentialebenen aufeinander orthogonal stehen, so gilt wegen (16) und $tg\,\varphi^* = -k_0\, ctg\,\tau$ für ein solches Punktepaar der Erzeugenden G_3 unserer Regelfläche

$$tg\,\varphi \cdot tg\,\varphi^* = -\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 = -k_0^2 \qquad (17)$$

Dies ist wiederum in Hinblick auf den Zentralpunkt $\mathfrak{P}_0$ geschrieben. Bezüglich des zweiten Zentralpunktes $\mathfrak{P}_3$ können wir dies auch umformen in

$$tg\,\bar{\varphi} \cdot tg\,\bar{\varphi}^* = -\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 = -k_3^2 \qquad \overline{(17)}$$

(17) und $\overline{(17)}$ entsprechen der Euklidischen Beziehung (3).

Die Formeln (16) beinhalten den Satz von der Berührungskorrelation: Für vier Punkte zu den Parameterwerten φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — mit τ_i mögen die entsprechenden Neigungswinkel der Tangentialebenen gegen die Zentralebene in $\mathfrak{P}_0$ bezeichnet werden — folgert man leicht die Doppelverhältnisgleichheit:

$$\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_3)}{\sin(\varphi_2-\varphi_3)} : \frac{\sin(\varphi_1-\varphi_4)}{\sin(\varphi_2-\varphi_4)} = \frac{\sin(\tau_1-\tau_3)}{\sin(\tau_2-\tau_3)} : \frac{\sin(\tau_1-\tau_4)}{\sin(\tau_2-\tau_4)} \qquad (18)$$

Das Büschel der Tangentialebenen in den Punkten einer Erzeugenden einer Regelfläche des elliptischen Raumes ist daher (wie im Euklidischen Raum) *der Reihe der Berührungspunkte „projektiv" zugeordnet.*

Schreiben wir (17) als symmetrische Bilinearform der homogenen Koordinaten (sin φ, cos φ) bzw. (sin φ^*, cos φ^*) auf der Geraden G_3, also

$$\beta_1^2 \sin\varphi \,.\, \sin\varphi^* + \alpha_1^2 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\varphi^* = 0,$$

so sehen wir, daß *die Punktepaare einer Erzeugenden einer Regelfläche des elliptischen Raumes, deren zugehörige Tangentialebenen auf einander senkrecht stehen, eine gleichlaufende Involution bilden,* der auch die beiden auf der Erzeugenden liegenden Zentralpunkte als entsprechendes Punktepaar angehören. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der beiden durch die Erzeugende legbaren *„Minimalebenen"*. (Aus $tg^2\varphi = -k_0^2$ folgt ja wegen (16) $tg\,\tau = \pm i$). Durch diese Punkte wird die Erzeugende in zwei Teile (Strecken) zerlegt, deren Mittelpunkte die beiden Zentralpunkte sind.

Für das *Gauß*sche Krümmungsmaß K im Punkte $\mathfrak{P}$ unserer Regelfläche ergibt sich[9]

$$K = 1 - \frac{\alpha_1^2\,\beta_1^2}{(\alpha_1^2\cos^2\varphi + \beta_1^2\sin^2\varphi)^2}$$

somit also das elliptische Gegenstück zur *Lamarle*schen Beziehung (4)

$$K = 1 - \frac{k_0^2}{(k_0^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2} = 1 - \frac{k_3^2}{(\cos^2\varphi + k_3^2\sin^2\varphi)^2}$$

durch Spezialisierung für die Zentralpunkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$

$$K_0 = 1 - \frac{1}{k_0^2} \text{ bzw. } K_3 = 1 - \frac{1}{k_3^2}$$

Die Übereinstimmung des Dralls einer Erzeugenden einer orthoiden Regelfläche mit dem Torsionsradius ihrer Striktionslinie in dem auf der Erzeugenden liegenden Punkt gilt im elliptischen, wie im Euklidischen Raum[10].

Wird für eine Erzeugende der Drall $k_0 = k_3 = \pm 1$, so artet die infinitesimale Schraubung in eine Links- bzw. Rechtsschiebung aus und die Regelfläche verhält sich in Umgebung dieser *„zylindrischen"* Erzeugenden wie ein Rechts- bzw. Linkszylinder (abwickelbare Regelfläche); das *Gauß*sche Krümmungsmaß K verschwindet längs einer solchen Geraden.

---

[9] Vgl. *H. R. Müller*, a. a. O., § 3.

[10] Vgl. *W. Schell-E. Salkowski*, Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl. (1914), S. 78, sowie *H. R. Müller*, a. a. O., § 3.

Schließlich können wir auch *Torsallinien* unserer Regelfläche erklären, in deren Umgebung diese das Verhalten einer Torse (Tangentenfläche einer Raumkurve) aufweist; es muß dann $\alpha_1 \beta_1 = 0$ gelten, was auf verschiedene Arten erfüllt sein kann: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ führt zu $k_0 = 0$, $k_3 = \infty$ also zu einer Torsallinie erster Ordnung mit dem Kuspidalpunkt $\mathfrak{P}_0$. Ist $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, so wird $k_0 = \infty$, $k_3 = 0$ und $\mathfrak{P}_3$ der Kuspidalpunkt der Torsallinie erster Ordnung. Längs solcher Torsallinien wird das *Gauß*sche Krümmungsmaß $K = 1$. Das gleichzeitige Verschwinden von α_1 und β_1 führt zu Torsallinien höherer Ordnung, deren Drall endlich und $\neq 0$ sein kann.

Entsprechend der Unterscheidung von Torsen und abwickelbaren Flächen des elliptischen Raums (d. h. Tangentenflächen von Raumkurven und im kleinen auf die Euklidische Ebene abwickelbaren Flächen) sind im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie die zylindrischen Erzeugenden nicht als Sonderfälle von Torsallinien anzusprechen[11].

[11] Liegt im Euklidischen Raum der Zentralpunkt einer Erzeugenden im Unendlichen, so ist sie Torsallinie mit unendlich fernem Kuspidalpunkt, also zylindrische Erzeugende.

Neue durch stereographische Projektion erhaltene Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten.

Von
Arnold Emch, Urbana, Illinois.

(Eingelangt am 3. März 1947.)

I. Einleitung.

Der Verfasser hat auf teils analytischem, teils geometrischem Wege die Sätze bewiesen:

1. Die stereographische Projektion aller ebenen Schnitte ε einer Fläche zweiter Ordnung F_2 von einem ihrer reellen Nabelpunkte aus auf eine ihm zugehörige Kreisschnittebene p, welche F_2 in einem Kreise E schneidet, ist ein Kreis e. Unter der Mannigfaltigkeit der ε sind auch die außerhalb E gelegenen Kreisschnitte enthalten.

2. Von zwei diametral gelegenen Nabelpunkten U und U' auf einer Fläche zweiter Ordnung F_2 projiziere man einen beliebigen ebenen Schnitt ε von F_2 auf eine Ebene p des zugehörigen Kreisschnittsystems, welche F_2 in einem Kreise E schneidet. Man erhält auf diese Weise zwei Kreise e und e', welche in Bezug auf E invers sind.

II. Kurzer Beweis der zwei Sätze.

1. Die Ebene ε schneidet die Minimalgeraden (Nullkreis) in zwei Punkten, welche von U aus in die zwei unendlich fernen Kreispunkte der Ebene p projiziert werden. Daraus folgt sofort, daß der Kegelschnitt e durch die Kreispunkte geht und deshalb ein Kreis ist.

2. Hier macht man von dem Satz Gebrauch, daß die Projektion der Punkte einer F_2 aus zwei ihrer Punkte (A, B) auf eine Ebene, die die reziproke Polare von $A\,B$ enthält, Punktepaare liefert, die zu F_2 polarkonjugiert sind. Identifiziert man jetzt $A\,B$ mit $U\,U'$, so wird die reziproke Polare von $U\,U'$ die unendlich ferne Gerade von p, und die Punkte von ε werden von U und U' in Punktepaare projiziert, welche in Bezug auf F_2, respektive E, polar konjugiert sind und deren Verbindungsgeraden durch den Mittelpunkt von E gehen. Dadurch werden sie inverse Punktepaare in Bezug auf E, und e und e' inverse Kreise.

Monoidi del 3^0 ordine per una calotta superficiale del 4^0 ordine.

Nota di
E. Bompiani, Roma.

(Ricevuto 19. marzo 1947.)

1. Com'è ben noto, il problema fondamentale per lo studio differenziale di una superficie dal punto di vista proiettivo consiste nella caratterizzazione di un riferimento invariante intrinsecamente legato al punto generico della superficie e all'intorno del minimo ordine che basti ad individuare quel riferimento.

Ho costruito un tale riferimento per via puramente geometrica esaminando la distribuzione degli elementi curvilinei del 4^0 ordine E_4 uscente dal punto e ricoprenti la calotta σ_4 della superficie[1]. Qui pervengo allo stesso riferimento, e ad altri risultati, prendendo in considerazione i monoidi del 3^0 ordine contenenti la calotta.

2. Parto dalla rappresentazione della calotta relativa al riferimento ricordato: ciò non ha nulla d'essenziale ma semplifica i calcoli; sia essa[2]

$$2.1 \qquad z = x\,y + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)(\alpha\,x + \beta\,y) + \ldots$$

---

[1] Si vedano le mie Note: *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*, „Rend. Acc. Lincei", vol. 25, 1937, p. 149; *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, „Rend. Semin. Matem. Univers. di Roma, s. 4, vol. 2, 1938, p. 99.

Di questo riferimento si sono successivamente occupati:

Enea Bortolotti, Quadriche di Moutard e fascio canonico, „Rend. Acc. Lincei" s. VI, vol. 25, 1937, p. 158 ed *A. Rollero*, Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie, „Rend. Acc. Lincei", s. VIII, vol. 1, 1945, p. 1059.

[2] Per confrontare con le notazioni adoperate nelle Note citate si ponga $P = 8\,\alpha$, $T = 8\,\beta$: questi, come gli altri coefficienti dello sviluppo 2.1, sono invarianti.

Ogni superficie del 3° ordine F^3 per tale calotta[3] ha l'equazione, come subito si verifica,

$$2.2 \quad z = x\,y + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \varrho\,z\,(z - x\,y) + (\alpha\,x + \beta\,y)(z - x\,y) + \\ + (\gamma\,x + \delta\,y)\,z^2 + \varepsilon\,z^3$$

con ϱ, γ, δ, ε arbitrarie.

Affinchè tale F^3 abbia un punto doppio (x, y, z, t), in coordinate omogenee, deve aversi (annullando le derivate prime)

$$2.3 \quad y\,t + \alpha\,z t + x^3 - 2\,\alpha\,x\,y - \beta\,y^2 - \varrho\,y\,z + \gamma\,z^2 = 0$$

$$2.4 \quad x\,t + \beta\,z t - \alpha\,x^2 - 2\,\beta\,x\,y + y^2 - \varrho\,x\,z + \delta\,z^2 = 0$$

$$2.5 \quad -t^2 + 2\,\varrho\,z t + (\alpha\,x + \beta\,y)\,t - \varrho\,x\,y + 2\,(\gamma\,x + \delta\,y)\,z + 3\,\varepsilon\,z^2 = 0$$

$$2.6 \quad -2\,t\,z + x\,y + \varrho\,z + (\alpha\,x + \beta\,y)\,z = 0.$$

Queste mostrano che:

Assegnato ad arbitrio un punto fuori del piano tangente $z = 0$ *esiste una sola* F^3 *con quel punto doppio contenente* σ_4.

L'equazione del cono osculatore nel punto doppio, indicando ora le coordinate correnti con X, Y, Z, T, è

$$2.7 \quad (x - \alpha\,y)\,X^2 + (t - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y - \varrho\,z)\,X\,Y + (y - \beta\,x)\,Y^2 + \\ (y + \alpha\,z)\,X\,T + (x + \beta\,z)\,Y\,T - z\,T^2 + (\alpha\,t - \varrho\,y + 2\,\gamma\,z)\,XZ + \\ + (\beta\,t - \varrho\,x + 2\,\delta\,z)\,Y\,Z + (-2\,t + 2\,\varrho\,z + \alpha\,x + \beta\,y)\,T\,Z + \\ + (\varrho\,t + \gamma\,x + \delta\,y + 3\,\varepsilon\,z)\,Z^2 = 0.$$

3. Le F^3 con punto doppio biplanare si hanno quando sia

$$3.1 \quad \begin{vmatrix} 2\,(x - \alpha\,y) & t - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y - \varrho\,z & y + \alpha\,z \\ t - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y - \varrho\,z & 2\,(y - \beta\,x) & x + \beta\,z \\ y + \alpha\,z & x + \beta\,z & -2\,z \end{vmatrix} = 0$$

per avere il luogo dei loro punti doppi bisogna eliminare ϱ fra questa e la 2.6, il che dà

$$\begin{vmatrix} 2\,(x - \alpha\,y)\,z & -(tz + \alpha xz + \beta yz - xy) & y + \alpha z \\ -(tz + \alpha xz + \beta yz - xy) & 2\,(y - \beta\,x)\,z & x + \beta z \\ y + \alpha\,z & x + \beta\,z & -2 \end{vmatrix} = 0$$

---

[3] Di superficie del 3° ordine per lo studio dell'intorno di un punto di una superficie si sono serviti anche *E. P. Lane*, The contact of a cubic surface with an analytic surface, „Trans. Amer. Math. Soc.", vol. 29, 1937, p. 472 e *B. Segre*, La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface,, „C. R. Acad. des Sciences", t. 184, 1927, p. 729. Però non ne hanno dedotto un riferimento proiettivo e la determinazione degli invarianti di σ_4.

Vi sono ∞^2 F^3 *per la calotta con un punto doppio biplanare: il luogo di questi è una superficie del* 4^0 *ordine con punto doppio uniplanare nel centro della calotta (e con lo stesso piano tangente).*

4. Restringiamo la classe dei monoidi considerati imponendo la condizione che la retta intersezione dei due piani tangenti nel punto biplanare incida la polare di Darboux della congiungente il punto stesso col centro della calotta.

La retta $X/x = Y/y = Z/z$ ha per polare di Darboux la retta $yX + xY - zT = 0, Z = 0$.

Il punto doppio della conica segata da $Z = 0$ sul cono osculatore 2.7, quando sia soddisfatta la 3.1, è determinato da

$$\begin{aligned} 2(x-\alpha y)X + (t-2\alpha x-2\beta y-\varrho z)Y + (y+\alpha z)T &= 0 \\ (t-2\alpha x-2\beta y-\varrho z)X + 2(y-\beta x)Y \quad + (x+\beta z)T &= 0 \\ (y+\alpha z)X + (x+\beta z)Y \quad - 2zT &= 0 \end{aligned}$$

e per il fatto voluto dev'essere ancora

$$yX + \quad xY \qquad\qquad - zT = 0.$$

Le due condizioni di compatibilità danno, quando si elimini ϱ con la 2.6;

$$\begin{aligned} (tz - xy)(\beta z - x) + 2yz(\alpha z - y) &= 0 \\ (tz - xy)(\alpha z - y) + 2xz(\beta z - x) &= 0 \end{aligned} \qquad 4.1$$

e da questi eliminando t

$$y(\alpha z - y)^2 = x(\beta z - x)^2. \qquad 4.2$$

Risulta di qua che:

Il luogo dei punti doppi biplanari dei monoidi considerati è una sestica razionale con punto triplo nel centro della calotta appartenente ad un cono cubico con retta doppia $x = \beta z$, $y = \alpha z$ *che pone in evidenza geometrica i due invarianti* α e β.

5. Si individua un monoide fra questi esigendo che la intersezione di uno dei piani tangenti nel punto biplanare con il piano tangente alla calotta sia la polare di *Darboux* della congiungente del centro della calotta col punto biplanare; cioè che conica la sezione di $Z = 0$ col cono osculatore sia del tipo

$$(yX + xY - zT)(pX + qY - T) = 0.$$

E si trova $p = \alpha, q = \beta$; $x = y = t = 0, z = 1$; $\varrho = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$.

L'unico punto dello spazio che possa assumersi come punto doppio biplanare di una F^3 *contenente* σ_4 *e tale che la traccia su* $Z = 0$ *di uno dei*

piani in esso tangente ad F^3 *sia la polare di Darboux della congiungente il punto stesso col centro di* σ_4 *è il vertice del tetraedro di riferimento adottato opposto a* $Z = 0$.

Quel tetraedro riceve così un'altra caratterizzazione geometrica (del tutto diversa da quella di partenza).

La traccia dell'altro piano tangente nel punto biplanare è la retta $\alpha X + \beta Y - T = 0$ (polare della retta doppia del cono 4.2) che mette di nuovo in evidenza gli invarianti α e β. La F^3 determinata ha per equazione la 2.1 quando si arresti lo sviluppo ai termini effettivamente scritti.

La F^3 ora individuata è a punto doppio uniplanare se e solo se $\alpha = \beta = 0$: il che fornisce il significato geometrico dell'annullarsi degli invarianti.

6. Possiamo cercare in generale (cioè quando non siano nulli α e β) se esistano F^3 a punto uniplanare per σ_4. Se la traccia del piano tangente doppio in esso su $Z = 0$ è $p X + q Y - T = 0$ dovrà aversi

$$-zp^2 = x - \alpha y,\ -zq^2 = y - \beta x,\ 2pz = y + \alpha z,\ 2qz = x + \beta z$$
$$-2pqz = t - 2\alpha x - 2\beta y - \varrho z.$$

Eliminando p, q fra le prime quattro si ha

6.1 $$(y - \alpha z)^2 = -4xz,\ (x - \beta z)^2 = -4yz$$

ed eliminando p, q, ϱ fra le ultime tre e la 2.6

6.2 $$2(tz - xy) = (x - \beta z)(y - \alpha z).$$

Le quattro rette intersezioni dei due coni 6.1 con la quadrica 6.2 incontrano questa in quattro punti, diversi dal centro di σ_4, che sono quelli cercati.

Vi sono quattro punti nello spazio che sono punti doppi uniplanari per quattro F^3 *contenenti* σ_4.[4]

Se si sceglie uno di questi punti come vertice del tetraedro opposto a $Z = 0$ e il relativo piano tangente doppio come $T = 0$ si ha uno sviluppo canonico i cui termini del 4° ordine sono identicamente nulli.

[4] Si può osservare utilmente che una F^3 con punto doppio uniplanare ha esattamente *due* invarianti proiettivi, quanti la calotta σ_4.

Beiträge zur zweidimensionalen Finsler'schen Geometrie.[1]

Von
Paul Funk, Wien.

Dem Andenken an Ludwig Berwald gewidmet.

(Eingelangt am 2. Mai 1947.)

1. Einleitung.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist, jene Variationsprobleme von der Form

$$\int F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \to Extr. \qquad (1{,}1)$$

zu kennzeichnen, die sich durch eine Punkttransformation in solche überführen lassen, bei denen die Extremalen gerade Linien sind. Gleichzeitig werden hier einige wichtige Formeln der *Finsler*'schen Geometrie[2] neu abgeleitet. Während in anderen Arbeiten (*Cartan*)[3] gruppentheoretische Gesichtspunkte in den Vordergrund treten oder der bereits in der *Riemann*'schen Geometrie weit entwickelte Apparat des Tensorkalküls für die Probleme der *Finsler*'schen Geometrie eine passende Erweiterung erfährt (*Berwald*[4], *Cartan*[5]), wird in der vorliegenden

---

[1] Die vorliegende, dem Andenken an *Ludwig Berwald* gewidmete Arbeit wurde — abgesehen von einer anderen Fassung der Anfangskapitel — der Redaktion der Compositio mathematica vorgelegt, konnte aber wegen der Einstellung dieser Zeitschrift dort nicht mehr erscheinen. Fast gleichzeitig mit mir hat sich auch mein damaliger Kollege *Berwald* mit demselben Problem beschäftigt und hat das hier behandelte Problem in ganz anderer Weise gelöst. Seine Arbeit ist inzwischen in den Annals of Math. erschienen und enthält bereits einen Hinweis auf die vorliegende Arbeit. (Ann. of Math. **42** (1941)).

[2] *P. Finsler:* Über die Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Inaugural-Dissertation, Göttingen (1903).

[3] *E. Cartan*: Sur un problem d'équivalence et la théorie des éspaces métriques généralisés. Mathematica 4 (1930), 114—136.

[4] *L. Berwald*: Insbesondere: Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume; Journal d. reine und angew. Math. 156 (1927), 191, sowie die dortgenannten früheren Arbeiten.

[5] *E. Cartan*: Les Espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79, 80 (1934).

Arbeit eine Methode verwendet, die in gewissem Sinn der natürlichen Geometrie von *Cesaro* entspricht (Anwendung spezieller Koordinatensysteme). Die Darstellung ist von der Lektüre früherer Arbeiten im wesentlichen unabhängig, und dementsprechend bringen die ersten Kapitel nichts wesentlich Neues.

2. Länge, Breite und Winkel.

Die Länge einer Kurve sei definiert durch ein Integral von der Form

$$s = \int F\,(x\ y\ \dot{x}\ \dot{y})\ dt$$
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \tag{2,1}$$

Dabei sollen für F die üblichen Voraussetzungen gelten (vgl. *Cartan*[5]), insbesondere soll F in $\dot{x}$, $\dot{y}$ positiv homogen von erster Ordnung sein. Ferner nehmen wir an, es sei die *Legendre*'sche Bedingung für das Variationsproblem (1.1) erfüllt, das heißt, es sei

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = +\frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = F_1 > 0 \tag{2,2}$$

Im folgenden gehen wir häufig zu einem Variationsproblem in der x-Form über, indem wir $t = x$ als Parameter benützen. Wir erhalten statt (2.1)

$$s = \int f\,(x, y, y')\ dx \to Extr \tag{2,3}$$
$$F\,(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\, f\,(x, y, y'), \qquad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Durch zweimalige Differentiation nach $\dot{y}$ ergibt sich

$$F_1 = \frac{f_{y'y'}}{\dot{x}^3}$$

Den Vektor

$$X = \frac{\dot{x}}{F} \qquad Y = \frac{\dot{y}}{F} \tag{2,4}$$

bezeichnen wir als *Elementvektor*.

Für die zu einem Punkt $x_0\ y_0$ gehörige Indikatrix

$$F\,(x_0, y_0, X, Y) = 1 \tag{2,5}$$

verwenden wir eine Parameterdarstellung, bei welcher der Parameter τ normiert ist durch die Bedingung

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{dX}{d\tau} & \frac{dY}{d\tau} \end{vmatrix} = 1 \qquad (2,6)$$

Durch Differentiation von (2.5) nach τ erhalten wir

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\tau} = 0;$$

ebenso durch abermalige Differentiation und Berücksichtigung von (2.2), (2.4) und (2.6):

$$\frac{d^2F}{d\tau^2} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot \frac{d^2X}{d\tau^2} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{d^2Y}{d\tau^2} + F_1 = 0 \qquad (2,7)$$

Ferner folgt durch Differentiation der Normierungsbedingung (2,6)

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{d^2X}{d\tau^2} & \frac{d^2Y}{d\tau^2} \end{vmatrix} = 0$$

Setzen wir dementsprechend

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{1}{\mu^2} X \qquad \frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{1}{\mu^2} Y \qquad (2,8)$$

so ergibt (2.7), unter Berücksichtigung der Homogenität von F und F_1

$$\frac{1}{\mu^2} = F_1(x_0\ y_0\ X\ Y)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{F^3(x_0, y_0, \dot{x}, \dot{y}) \cdot F_1(x_0, y_0, \dot{x}, \dot{y})} = \frac{1}{f^3 f_{y'y'}} \qquad (2,9)$$

Sei nun x_0, y_0, y_0' ein vorgegebenes Linienelement, und sei X_0 Y_0, der dazugehörige Punkt auf der Indikatrix; wir legen durch X_0, Y_0 eine dreipunktig berührende Ellipse mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt $X = 0$, $Y = 0$, und bezeichnen sie als die zu x_0, y_0, y_0' gehörige *„indizierende Ellipse"* (ind. Ell.).

Ein zum Elementvektor konjugierter Halbmesser der ind. Ell. hat die Komponenten

$$\xi = -\frac{F_{\dot{y}}(x_0, y_0, X, Y)}{\sqrt{F_1(x_0, y_0, X, Y)}} \qquad \eta = \frac{F_{\dot{x}}(x_0, y_0, X, Y)}{\sqrt{F_1(x_0, y_0, X, Y)}}$$

Wir nennen ihn *„Transversalitätsvektor"*.

Unter Berücksichtigung der Homogenität von F_1 ergibt sich

$$\xi = -\frac{f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}} \qquad \eta = \frac{f - y' f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}} \tag{2,10}$$

Bei einer beliebigen Punkttransformation

$$x = g(\tilde{x}, \tilde{y}) \qquad y = h(\tilde{x}, \tilde{y}) \tag{2,11}$$

gilt für die Transformation von dx und dy

$$dx = g_{\tilde{x}} \cdot d\tilde{x} + g_{\tilde{y}}\, d\tilde{y} \qquad dy = h_{\tilde{x}}\, d\tilde{x} + h_{\tilde{y}}\, d\tilde{y} \tag{2,12}$$

Dieser Transformation entspricht nun eine affine Transformation für die jeweilige Ebene der Indikatrix, mit $X = 0$, $Y = 0$ als Fixpunkt:

$$X = g_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\, \tilde{X} + g_{\tilde{y}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\, \tilde{Y}$$
$$Y = h_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\, \tilde{X} + h_{\tilde{y}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\, \tilde{Y}$$

Wir betrachten speziell eine solche Punkttransformation, bei der eine beliebige *Extremale* der xy-Ebene in die $\tilde{x}$-*Achse* so übergeführt wird, daß für jeden ihrer Punkte der *Elementen- bzw. Transversalitätsvektor* der XY-Ebene in die *Einheitsvektoren* (1,0) bzw. (0,1) der $\tilde{X}\tilde{Y}$-Ebene übergehen:

$$X = \frac{1}{f(x_0, y_0, y_0')}\, \tilde{X} - \frac{f_{y'}(x_0, y_0, y_0')}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}} \cdot \tilde{Y}$$
$$Y = \frac{y_0'}{f(x_0, y_0, y_0')}\, \tilde{X} + \frac{f - y_0' f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}}\, \tilde{Y} \tag{2,13}$$

bzw.

$$dx = \frac{1}{f}\, d\tilde{x} - \frac{f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}}\, d\tilde{y}$$
$$dy = \frac{y_0'}{f}\, d\tilde{x} + \frac{f - y_0' f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}}\, d\tilde{y} \tag{2,14}$$

Hiebei geht also die ind. Ell. der XY-Ebene in den Einheitskreis der $\tilde{X}\tilde{Y}$-Ebene über.

3. Differentiation nach Länge, Breite und Winkel.

Im Anschluß an diese Transformation lassen sich nun die drei für die ebene *Finsler*'sche Geometrie grundlegenden Differentiationsprozesse:

Differentiation nach der Länge,
Differentiation nach der Breite,
Differentiation nach dem Winkel

definieren.

Wir heben ein festes Linienelement $x_0\ y_0\ y_0'$ heraus. Wir denken uns ferner durch dieses Linienelement eine Extremale gelegt und wenden die oben besprochene Transformation an. Die drei Differentiationsprozesse nach Länge, Breite und Winkel sollen nun für das betreffende Linienelement dadurch erklärt sein, daß sie nach Durchführung der Transformation (2.12) übergehen in die Prozesse

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}},\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}},\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'}\ \Big|_{\tilde{x}=\tilde{y}=\tilde{y}'=0}$$

Sei nun $\Phi\ (x,\ y,\ y')$ eine in der Umgebung dieses Linienelementes reguläre Funktion, so ist insbesondere:

a) Differentiation nach der Länge.

$$\Phi_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \Phi_x \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \Phi_y \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \Phi_{y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial s}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{f\,(x\ y\ y')'}\quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{y'}{f},\quad \frac{\partial y'}{\partial s} = \frac{y''}{f} \tag{3,1}$$

$$y'' = \frac{f_{yy'} + f_{xy'} - f_y}{f_{y'y'}}$$

Dabei denkt man sich also entlang der Extremalen differenziert.

b) Differentiation nach der Breite.

Hier werden zunächst $\frac{\partial x}{\partial b}$ und $\frac{\partial y}{\partial b}$ so erklärt, daß sie die Komponenten des Transversalitätsvektors ergeben (vgl. 2.10), und $\frac{\partial y'}{\partial b}$ vermöge

$$\frac{\partial}{\partial b} y' = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} \right\}$$

und der Vertauschbarkeit $x_{bs} = x_{sb}\quad y_{bs} = y_{sb}$
Damit wird

$$\Phi_b = \frac{\partial \Phi}{\partial b} = \Phi_x \frac{\partial x}{\partial b} + \Phi_y \frac{\partial y}{\partial b} + \Phi_{y'} \frac{\partial y'}{\partial b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} = \xi = \frac{-f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}} \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = \eta = \frac{f - y' \cdot f_{y'}}{\sqrt{f^3 f_{y'y'}}} \tag{3,2}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{y_s}{x_s}\right) = \frac{x_s \cdot y_{sb} - y_s \cdot x_{sb}}{x_s^2} = \frac{x_s \eta_s - y_s \xi_s}{x_s^2} = \frac{d\,\eta}{d\,x} - y' \frac{d\,\xi}{d\,x}$$

c) Differentiation nach dem Winkel.

Aus den Transformationsformeln (2.14) folgt zunächst

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x} = \left\{ \frac{\dfrac{y'}{f} + \dfrac{f - y'\,f_{y'}}{\sqrt{f^3\,f_{y'y'}}}\,\widehat{y'}}{\dfrac{1}{f} - \dfrac{f_{y'}}{\sqrt{f^3\,f_{y'y'}}}\,\widehat{y'}} \right\}_0 \tag{3,3}$$

Die Klammer mit dem Index Null deutet an, daß für die Argumente das Ausgangslinienelement genommen wird. Durch Differentiation folgt

$$\left| \frac{d\,y'}{d\,\widehat{y'}} \right|_{\widehat{y'}\,=\,0} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_{y'y'}}} \tag{3,4}$$

und somit erhalten wir für die Differentiation nach dem Winkel

$$\Phi_\theta = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\theta} = \Phi_x \cdot \frac{\partial\,x}{\partial\,\theta} + \Phi_y\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\theta} + \Phi_{y'}\,\frac{\partial\,y'}{\partial\,\theta}$$

$$\frac{\partial\,x}{\partial\,\theta} = 0 \qquad \frac{\partial\,y}{\partial\,\theta} = 0 \qquad \frac{\partial\,y'}{\partial\,\theta} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_{y'y'}}}$$

also

$$\Phi_\theta = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\theta} = \Phi_{y'} \cdot \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_{y'y'}}} \tag{3,5}$$

4. Endliche Länge, Breite und Winkel.

Für den Aufbau der *Finsler*'schen Differentialgeometrie ist es grundsätzlich nicht nötig, auf eine Definition der Begriffe „endliche Länge", „endliche Breite" und „endlicher Winkel" selbst einzugehen, doch die in der vorliegenden Arbeit verwendete Methode verlangt es, und die Einführung dieser Begriffe verhilft oft zu einer bequemeren und anschaulicheren Ausdrucksweise.

Der Begriff *endliche Länge* ist bereits durch Formel (2.3) erklärt. Der *Längenabstand* s von einer Kurve (für eine genügend kleine Umgebung) wäre mit Hilfe der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung zu erklären, das heißt aus der Eliminante der beiden Gleichungen

$$s_x = f - y'\,f_{y'} \qquad s_y = f_{y'}$$

unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung, daß entlang der Kurve $s = 0$ ist.

Zur Definition des *endlichen Breitenabstandes* $b\ (x,\ y)$ von einer beliebigen Kurve $b\ (x,\ y) = 0$ (für eine hinreichend kleine Umgebung) betrachten wir die Schar der Kurven $b = \text{const}$. Für sie gilt

$$y' = -\frac{b_x}{b_y}$$

Ferner gilt für die Schar der dazu transversalen Kurven

$$b_x \frac{\partial x}{\partial b} + b_y \frac{\partial y}{\partial b} = 1$$

Setzen wir für $\frac{\partial x}{\partial b}$ und $\frac{\partial y}{\partial b}$ die Werte (3.2) ein, so ergeben die letzten beiden Gleichungen:

$$b_y = \sqrt{f\left(x, y, -\frac{b_x}{b_y}\right) \cdot f_{y'y'}\left(x, y, -\frac{b_x}{b_y}\right)} \tag{4,1}$$

oder, unter Benützung der homogenen Schreibweise

$$F(x, y, -b_x, b_y) \cdot F_1(x, y, -b_x, b_y) = 1$$

Durch diese partielle Differentialgleichung und durch die Anfangsbedingung, daß b auf der Ausgangskurve gleich Null sein soll, ist b eindeutig bestimmt[6].

Die Definition des *endlichen Winkels* kann in mehrfacher Weise so vorgenommen werden, daß sie der mit (3.5) eingeführten Definition der Differentiation nach dem Winkel entspricht. Auf die Definition, die *Finsler*[7] gibt, wird man durch den invarianten Charakter der *Weierstraß*'schen E-Funktion geführt, wobei die Analogie zur Elementargeometrie klar hervortritt; sie sei hier übergangen. Den Hinweis auf einen, für den Aufbau der Infinitesimalgeometrie in vieler Beziehung sehr geeignete Definition des Winkels verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von *Caratheodory*. In unserer Schreibweise ist sie gegeben durch

$$\varphi = arc\ tg\ \widetilde{y'} \tag{4,2}$$

---

[6] *Finsler*: l. c. Man kann auch den Begriff „Breite" mit dem in Analogie mit der Riemannschen Geometrie definierten Begriff „Flächeninhalt" in Zusammenhang bringen. Man beachte die folgende elementargeometrische Tatsache: Für den Flächeninhalt eines sphärischen Flächenstückes, das von Bogen gleicher metrisch gemessener Länge l auf Parallelkreisen zwischen den Breitengraden β_1 und β_2 überdeckt wird, gilt die einfache Formel $l(\beta_2 - \beta_1)$. Man kann den Begriff „Breite" in der Finslerschen Geometrie dadurch definieren, daß man die analoge Formel für ein Flächenstück fordert, das von Kurvenbogen überdeckt wird, die die gleiche Länge besitzen und die voneinander einen konstanten Breitenabstand haben. Vgl. *Berwald*: Über Finslersche und Cartansche Geometrie, Mathematica XVII.

[7] Siehe *Finsler*, l. c. § 20. Bei *Finsler* selbst wird sofort der Winkel zwischen zwei beliebigen Kurven definiert.

In der vorliegenden Arbeit wird aber die unmittelbar an (3.4) sich anschließende Definition des *Landsberg*'schen *Winkels*[8] verwendet:

$$\theta = \int \frac{\sqrt{f_{y'y'}}}{\sqrt{f}}\, dy'$$

oder, wegen

$$y' = \frac{Y}{X}, \quad \frac{d\,y'}{d\,\tau} = \frac{1}{X^2} = f^2 \tag{4,3}$$

$$\text{und (2.9):}\quad f_{y'y'} = \frac{\mu^2}{f^3}$$

auch:

$$\frac{d\,\theta}{d\,\tau} = \sqrt{f^3 f_{y'y'}} = \frac{1}{\mu} \text{ und } \theta = \int \frac{d\,\tau}{\mu} \tag{4,4}$$

Der Zusammenhang zwischen den Definitionen von *Caratheodory* und *Landsberg* kann folgendermaßen bewirkt werden[9]: Seien die Richtungen der beiden Linienelemente, die den Winkel einschließen, durch α und β gekennzeichnet. Wir schalten Zwischenrichtungen ein, die wir der Reihe nach mit $1, 2, \ldots, n-1$ bezeichnen; 0 sei identisch mit α und n identisch mit β. Dann ergibt sich für den *Landsberg*'schen Winkel

$$\theta\,(\alpha, \beta) = \lim \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi\,(\nu, \nu+1)$$

wobei der Grenzübergang wie bei der Definition des bestimmten Integrals zu bilden ist. Wir erhalten somit

$$\theta = \int \frac{d\,\tau}{\mu} = \int_{\tau_\alpha}^{\tau_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial\,\bar{\tau}}\, \varphi\,(\tau, \bar{\tau})\right]_{\bar{\tau}=\tau} d\,\tau$$

Für das inhomogene Problem ist es zweckmäßig, nicht τ sondern $y' = \frac{Y}{X}$ als Parameter zu verwenden.

5. Koordinatensystem der Länge und Breite.

Diese Bezeichnung wollen wir verwenden, wenn wir einen Punkt P in Bezug auf ein Linienelement (x, y, y') in der folgenden Weise festlegen:

---

[8] *Landsberg*: Über die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Ann. 63 (1908), 313—349.

[9] Die Bemerkung, daß man von der *Finsler*schen zur *Landsberg*schen Definition durch die Burkillische Integraloperation geführt wird, wurde von *Golab* gemacht. Internationaler Mathematiker-Kongreß, Zürich 1932.

Wir legen durch das Linienelement L_0 mit dem Punkt P_0 eine Extremale C_0. Den Breitenabstand b des Punktes P in Bezug auf C_0 nennen wir die *Breitenkoordinate* des Punktes. Sei wieder wie im vorigen Paragraph C die Schar der Kurven mit konstantem Breitenabstand von C_0, und sei T eine Kurve durch P transversal zu C; sei schließlich Q der Schnittpunkt von T mit C_0: Die längs C_0 gemessene Länge des Bogens $P_0 Q$ bezeichnen wir als die *Längenkoordinate* s.

Beim Problem der geodätischen Linie auf der Einheitskugel entsprechen dann tatsächlich b und s der geographischen Breite bzw. Länge, wenn wir C_0 als Aequator auffassen. Im folgenden werden wir statt der Buchstaben s und b die Buchstaben x und y benützen.

6. Krümmungsmaß und Hauptskalar.

Wir legen ein Koordinatensystem zugrunde, wie wir es soeben beschrieben haben. Sei $P\,(x, y)$ ein beliebiger Punkt in der Umgebung von L_0, weiter sei N der Schnittpunkt von $x = 0$ mit der Parallelkurve C zu C_0 durch P. Schließlich sei $s = s\,(x, y)$ die Länge des Bogens NP auf C, dann läßt sich das *Krümmungsmaß* für L_0 in der folgenden Weise definieren:

$$\mathfrak{K} = -\left[\frac{\partial^3 s}{\partial x\, \partial y^2}\right]_{x=0,\, y=0}$$

Legt man das Variationsproblem in der inhomogenen Form zugrunde, so ergibt sich[10]

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{f^2}\Big[-\frac{1}{\sqrt{f f_{y'y'}}}\frac{d^2\sqrt{f f_{y'y'}}}{dx^2} + \frac{1}{f}\frac{df}{dx}\frac{1}{\sqrt{f f_{y'y'}}}\frac{d}{dx}\sqrt{f f_{y'y'}} + \\ + \frac{1}{f_{y'y'}}\frac{d f_{y'y'}}{dx} - f_{yy}\Big] \qquad (6{,}1)$$

Diese Formel ergibt sich unmittelbar aus der von *Underhill* entwickelten und z. B. bei *Bolza* erwähnten Formel für das homogene Problem, indem man die x-Koordinate als Parameter wählt.

---

[10] *Underhill*: Invariante of the function $F(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ under point and parameter transformation, connected with the Calcul of Variations. Dissertation Chigago (1907). Siehe auch *Bolza*, Lehrbuch der Variationsrechnung, Leipzig (1909), 228.

Im Anschluß an die Entwicklung des § 4 kann man den *Hauptskalar* für das durch $\tau = \tau_0$ gekennzeichnete Linienelement definieren durch die Formel[11]

$$\mathfrak{I} = \lim_{\tau_1 \to \tau_0} \frac{4\,[\varphi(0,1) + \varphi(1,0)]}{[\varphi(0,1) - \varphi(1,0)]^2} = -\left(\frac{d\,\mu}{d\,\tau}\right)_{\tau=\tau_0}$$

Wenn wir zum inhomogenen Problem übergehen, erhalten wir nach (2,9) und (4,3):

$$\mathfrak{I} = -f^2 \frac{\partial}{\partial y'}\left(f^{-\frac{3}{2}} f_{y'y'}{}^{-\frac{1}{2}}\right) = f^{-\frac{1}{2}} f_{y'y'}{}^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2} f_{y'} f_{y'y'} + \frac{1}{2} f f_{y'y'y'}\right) \tag{6,2}$$

7. Projektiver Parameter und projektives Maß.

In nahem Zusammenhang mit dem Begriff Krümmungsmaß steht der Begriff des projektiven Parameters π auf einer Extremalen[12]. Darunter verstehen wir den Quotienten zweier linear unabhängiger Lösungen der *Jakobi*'schen Gleichung für diese Extremale. Es gilt dann die „*Schwarz*'sche Differentialgleichung"

$$\frac{1}{2}\left\{\pi, s\right\} = \mathfrak{R}$$

wobei $\left\{\pi, s\right\}$ den *Schwarz*'schen Differentialausdruck bedeutet. Wir können also diese Differentialgleichung auch schreiben in der Form

$$(\pi_s{}^{-\frac{1}{2}})_{ss} + \mathfrak{R}\,\pi_s{}^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{7,1}$$

Als projektives Maß p eines Punktes P von einem durch $s = 0$ gekennzeichneten Ausgangspunkt P_0 bezeichnen wir den Wert jenes speziellen projektiven Parameters, der den folgenden Anfangsbedingungen genügt: Es sei für $s = 0$

$$p = 0 \qquad \frac{d\,p}{ds} = 1 \qquad \frac{d^2 p}{ds^2} = 0$$

Es gelten dann Entwicklungen von der Form

---

[11] Siehe *Berwald* (4), Seite 204, ferner die in (6) genannte Arbeit.

[12] Für den Sonderfall $\mathfrak{R} = \text{const}$ wurde diese Gleichung benützt in meiner Arbeit: Über Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten Linien sind. Math. Ann. 101. Später für den allgemeinen räumlichen Fall wurde der projektive Parameter eingeführt durch *Witehead* in seiner Dissertation: The representation of projective Spaces. Ann. of Math. 32 (1931), 327. Über weitere Literatur siehe *Berwald*: On the projective geometry of paths. Ann. of. Math. 37 (1936), 879.

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\mathfrak{K}^0}{2} s^2 \dots$$

$$p = s + \frac{\mathfrak{K}^0}{3} s^3 \dots \tag{7,2}$$

$$s = p - \frac{\mathfrak{K}^0}{3} p^3 \dots$$

Dabei soll der Index Null hier und im folgenden anzeigen, daß der Wert für den Anfangspunkt P_0 zu nehmen ist.

8. Die Vertauschungsformeln.

Für die im § 3 durch (3,1), (3,2) und (3,5) erklärten Differentiationen gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Phi_{b\theta} - \Phi_{\theta b} &= -\Phi_s - \mathfrak{I}\Phi_b - \mathfrak{I}_s \Phi_\theta \\ \Phi_{\theta s} - \Phi_{s\theta} &= -\Phi_b \\ \Phi_{sb} - \Phi_{bs} &= -\mathfrak{K}\Phi_\theta \end{aligned} \tag{8,1}$$

Wir bezeichnen diese Formeln als *Cartan*'sche Vertauschungsformeln[13]. Sie können leicht bewiesen werden, wenn man mit dem Linienelement, in dem die Differentiation durchgeführt werden soll, ein Koordinatensystem der Längen und Breiten verbindet.

Mit einem Querstrich oberhalb der Buchstaben deuten wir an, daß wir voraussetzen, es sei $y' = 0$, und dementsprechend verwenden wir die mit einem Querstrich versehenen Funktionszeichen für Funktionen von x und y. Mit zwei Querstrichen oberhalb der Buchstaben deuten wir an, daß wir anzunehmen haben, es sei $y = 0$ und $y' = 0$, und dementsprechend verwenden wir die mit zwei Querstrichen versehenen Funktionszeichen zur Bezeichnung von Funktionen von x allein. Dann folgt aus der Transversalitätsbedingung

$$\bar{f}_{y'} = 0 \qquad \bar{f} = 1 \qquad \bar{f}_{y'y'} = 1 \tag{8,2}$$

$$\bar{\bar{f}} = 1 \qquad \bar{\bar{f}}_{y'y'} = 1$$

und da $y = 0$ eine Extremale ist,

$$\bar{\bar{f}}_y = 0 \text{ und auch } \bar{\bar{f}}_{y'y'y} = 0 \tag{8,3}$$

Ferner erhalten wir mit Rücksicht auf (6,1) und (6,2)

$$\bar{\bar{f}}_{yy} = -\mathfrak{K} \qquad \bar{\bar{f}}_{y'y'y'} = 2\mathfrak{I} \tag{8,4}$$

[13] Siehe Anmerkung 3.

Es ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{x}}_s & \overline{y}_s & \overline{y}'_s \\ \overline{x}_b & \overline{\overline{y}}_b & \overline{y}'_b \\ x_\theta & y_\theta & \overline{\overline{y}}'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8,5}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{x}}_{b\theta} & \overline{\overline{y}}_{b\theta} & \overline{\overline{y}}'_{b\theta}; & \overline{\overline{x}}_{\theta b} & \overline{\overline{y}}_{\theta b} & \overline{\overline{y}}'_{\theta b} \\ \overline{\overline{x}}_{\theta s} & \overline{\overline{y}}_{\theta s} & \overline{\overline{y}}'_{\theta s}; & \overline{\overline{x}}_{s\theta} & \overline{\overline{y}}_{s\theta} & \overline{\overline{y}}'_{s\theta} \\ \overline{\overline{x}}_{sb} & \overline{\overline{y}}_{sb} & \overline{\overline{y}}'_{sb}; & \overline{\overline{x}}_{bs} & \overline{\overline{y}}_{bs} & \overline{\overline{y}}'_{bs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\overline{\overline{\mathfrak{I}}} & -\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\overline{\mathfrak{K}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8,6}$$

Die meisten dieser Formeln folgen unmittelbar aus (8.2) bis (8,4) und den Formeln und Ausführungen des 3. und 5. Paragraphen, nur die Ermittlung von $y'_{b\theta}$ ist etwas umständlich. Es ist dazu nötig, zunächst die in der zweiten Zeile zusammengefaßten Formeln zu entwickeln, d. h. also die zweite der *Cartan*'schen Formeln zu beweisen.

Um $y'_{b\theta}$ zu ermitteln, gehen wir aus von (3,2):

$$y'_{b\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{d\,\eta}{d\,x} - y'\frac{d\,\xi}{d\,x}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\eta_s}{x_s} - y'\frac{d\,\xi}{dx}\right)$$

Ferner muß man

$$\bar{y}' = 0 \qquad \frac{\overline{\overline{d\,\xi}}}{d\,x} = 0 \qquad \overline{\overline{\eta}}_s = 0 \qquad \overline{\overline{\eta}}_b = 0$$

$$\overline{\overline{\eta}}_{s\theta} = \overline{\overline{\eta}}_{\theta s} - \overline{\overline{\eta}}_b, \quad \overline{\overline{y}}_{b\theta} = -\overline{\overline{\mathfrak{I}}}$$

benützen. Man erhält:

$$\overline{\overline{y}}'_{b\theta} = \frac{\overline{\overline{\eta}}_{s\theta}\,\overline{\overline{x}}_s - \overline{\overline{x}}_{s\theta}\,\overline{\overline{\eta}}_s}{\overline{\overline{x}}_s^2} = \overline{\overline{y}}_{b\theta s}$$

Wendet man auf (8,1) die *Poisson-Jakobi*sche Idendität an, so erhält man die folgende von *Berwald* herrührende Formel[14]:

$$\mathfrak{I}_{ss} + \mathfrak{K}\,\mathfrak{I} + \mathfrak{K}_\theta = 0 \tag{8,7}$$

Wir bezeichnen sie weiterhin als „*Berwald*'sche *Identität*". (*Cartan* bezeichnet sie in Analogie zur *Riemann*'schen Geometrie als *Bianchi*'sche Identität).

9. Projektive Polarkoordinaten.

Es ist wohl ein an und für sich naheliegender Gedanke, die Invariantentheorie der Differentialgleichung zweiter Ordnung

[14] Siehe Anmerkung 4.

$$y'' = \Psi(x, y, y') = \sum_0^\infty \psi_\nu(x, y) \cdot y'^\nu$$

dadurch zu entwickeln, daß man durch geeignete Punkttransformationen die ersten beiden Glieder, d. h. die Koeffizienten von $(y')^0$ und $(y')^1$ zum Verschwinden bringt. Dieser Gedanke wird auch in einer Arbeit von *Thomsen*[15] erwähnt, aber nicht ausgenützt. Dies hängt damit zusammen, daß durch diese Forderung allein die Form der Differentialgleichung noch nicht festgelegt ist. Ordnet man aber der Differentialgleichung ein Variationsproblem zu, dessen Extremalen ihr genügen, so gibt es ein durch die Einfachheit seiner geometrischen Bedeutung ausgezeichnetes Koordinatensystem, wo in der zugehörigen Differentialgleichung der Extremalen diese beiden Koeffizienten verschwinden. Dieses Koordinatensystem soll nun im folgenden festgelegt werden.

Um diejenigen Koordinaten eines Punktes P, die wir als projektive Polarkoordinaten mit dem Pol P_0 bezeichnen wollen, zu definieren, betrachten wir die Schar der Extremalen durch P_0. Eine beliebige unter ihnen wählen wir als x-Achse. Sei X ein Punkt der x-Achse. Als y-Koordinate wählen wir den *Landsberg*'schen Winkel zwischen der x-Achse und P_0P:

$$y = \theta(X P_0 P)$$

Ist nun p das projektive Maß von P_0P, so wählen wir als x-Koordinate

$$x = -\frac{1}{p}$$

Die Wahl des Vorzeichens entspricht der Forderung $\frac{dx}{dp} > 0$.

Nach (7,2) erhält man für

$$\begin{aligned} s(x\,y) &= -\frac{1}{x} + \frac{\mathfrak{K}^0}{3}\,\frac{1}{x^3}\cdots \\ f(x, y, 0) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\mathfrak{K}^0}{x^4}\cdots \end{aligned} \tag{9,1}$$

und ferner

$$\sqrt{f(x, y, 0)} = -\frac{1}{x} + \frac{\mathfrak{K}^0}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\cdots$$

Dabei ist das Vorzeichen so bestimmt, daß $\sqrt{f(x, y, 0)}$ in der Umgebung von $x = -\infty$ positiv ist.

[15] *G. Thomsen*: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, XVI., Abhandlungen, Hamburg (1930), 301.

Benützen wir wieder den Querstrich oberhalb der Funktionszeichen im selben Sinn wie im § 8, so ergibt sich

$$\bar{f}_{y'x} - \bar{f}_y = 0 \tag{9,2}$$

Daher nimmt für eine beliebige Extremale $y = \text{const.}$ die *Jakobi*'sche Gleichung die Gestalt an

$$\frac{d\,(\bar{f}_{y'y'}\,\frac{d\,\eta}{dx})}{dx} = 0 \tag{9,3}$$

Nun soll für die Extremalen $y' = 0$ x ein projektiver Parameter sein, also ist der allgemeinste projektive Parameter von der Form

$$\pi = \frac{\alpha\,(y)\,x + \beta\,(y)}{\gamma\,(y)\,x + \delta\,(y)}$$

Da aber eine Lösung der *Jakobi*'schen Gleichung eine Konstante ist, so muß es aber auch entsprechend der in § 7 gegebenen Definition des projektiven Parameters eine Lösung von der Form $\eta = \pi$ geben. Setzt man in (9,3) diesen Wert von η ein, so folgt aus $\pi'\,\bar{f}_{y'y'} = 1$:

$$\bar{f}_{y'y'} = \frac{1}{[c\,(y)\,x + d\,(y)]^3}, \quad c = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\,\delta - \beta\,\gamma}}, \quad d = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha\,\delta - \beta\,\gamma}} \tag{9,4}$$

Aus (3,1), (3,2) und (3,5) folgt durch Auflösung für $y' = 0$

$$\bar{\Phi}_y = \sqrt{\bar{f} \cdot \bar{f}_{y'y'}}\,\bar{\Phi}_b + \bar{f}_{y'}\bar{\Phi}_s - \bar{f}_{y'y'}\,\frac{d\,(\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}^{-\frac{1}{2}})}{dx}\,\bar{\Phi}_\theta$$

Bilden wir den Grenzwert für $x \to -\infty$. Aus der Bedeutung von y folgt

$$\lim_{x \to -\infty} \bar{\Phi}_y = \lim_{x \to -\infty} \bar{\Phi}_\theta \tag{9,5}$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\bar{f}\,\bar{f}_{y'y'}} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \bar{f}_{y'} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \bar{f}_{y'y'}\,\frac{d\,(\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}^{-\frac{1}{2}})}{dx} = -1 \tag{9,6}$$

Nach (9,1) ist

$$-\bar{f}^{-\frac{1}{2}} = x\,(1 + \frac{\mathfrak{K}^0}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \ldots)$$

und wegen (9.4) $\bar{f}_{y'y'}^{-\frac{1}{2}} = c\,(y) \cdot x + d\,(y)$

$$-\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}{}^{-\frac{1}{2}} = x^2\left[c + \frac{d}{x} + \frac{\mathfrak{R}^0}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdots\right]$$

$$-\frac{d}{dx}\left[\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}{}^{-\frac{1}{2}}\right] = 2\,c\,x + d + \ldots$$

Entwickelt man die dritte Gleichung (9,6) in der Umgebung von $x = -\infty$ unter der Voraussetzung $c \neq 0$, so ergibt sich

$$-\bar{f}_{y'y'}\frac{d}{dx}\left(\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}{}^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{c^2\,x^2 + \ldots}\cdot(2\,c\,x + \ldots) = \frac{2}{cx} + \cdots$$

Das widerspricht der Forderung, daß der Grenzwert — 1 werden soll. Dagegen erhält man mit $c = 0$:

$$-\bar{f}_{y'y'}\cdot\frac{d}{dx}\left(\bar{f}^{-\frac{1}{2}}\,\bar{f}_{y'y'}{}^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{d^2(y)}\left(d(y) + \ldots\right) = \frac{1}{d(y)} + \cdots$$

und wegen (9,6):

$$\mathrm{d}(y) = -1 \text{ also } \bar{f}_{y'y'} = 1 \tag{9,7}$$

Für projektive Polarkoordinaten sind somit kennzeichnend die Gleichungen (9,2), (9,5) und (9,7). Nach (9,7) und (9,3) ist nun die allgemeinste Lösung der *Jakobi*'schen Gleichung eine lineare Funktion von x. Betrachten wir nun in einem beliebigen Punkt $x = x^*\ \ y = y^*$ eine Extremale, deren Neigung in diesem Punkt durch $y' = y'^*$ gekennzeichnet ist, und sei $y = y(x; x^*, y^*, y'^*)$ die Gleichung der Extremalen, dann ist nach dem Satz von *Jakobi* für die Extremalen $y' = 0$

$$\eta = \left(\frac{\partial y}{\partial y'^*}\right)_{y'^* = 0}$$

eine Lösung der *Jakobi*'schen Gleichung. Nun ist aber $\dfrac{d^2\eta}{dx^2} = 0$, also ist auch

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial y'^*}\right)_{\substack{y = y^* \\ y'^* = 0}} = \left(\frac{\partial y'}{\partial y'^*}\right)_{\substack{y = y^* \\ y'^* = 0}} = \psi_1(x_1 y^*) = 0 \tag{9,8}$$

Ferner ist $\Psi_0 = 0$, da $y' = 0$ Extremalen sind. Wir erhalten somit die Differentialgleichung der Extremalen in der Form

$$y' = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x, y)\cdot y'^\nu$$

Die folgenden Paragraphen enthalten Aussagen über die Bedeutung von ψ_4, ψ_3 und ψ_2. Allerdings werden wir die Formeln nur so weit explizit entwickeln, wie es für die zu Beginn der Arbeit genannte Aufgabe nötig ist.

10. Invariante Kennzeichen von Variationsproblemen, bei denen die Euler'sche Gleichung die Gestalt annimmt:

$$y'' = A(x, y) + B(x, y)\, y' + C(x, y)\, y'^2 + D(x, y)\, y'^3$$

Ein solche Differentialgleichung geht bekanntlich bei beliebiger Punkttransformation wieder in eine Differentialgleichung von der gleichen Art über[16]. Die Differentialgleichung $y'' = 0$ gehört natürlich dieser Klasse von Differentialgleichungen an. Wir werden zuerst auf die Frage geführt: Wie kann man in invarianter Weise jene Variationsprobleme kennzeichnen, bei denen die *Euler*'sche Gleichung dieser Klasse angehört.

Durch Differentiation der *Euler*'schen Gleichung nach y' erhält man, wenn man die Ableitungen nach y' durch römische Ziffern kennzeichnet:

$$\begin{aligned}
&f_{\mathrm{II}}\, y''_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{III}}\, y'' + f_{\mathrm{II}y} \cdot y' + f_{\mathrm{II}x} = 0\\
&f_{\mathrm{II}}\, y''_{\mathrm{II}} + 2 f_{\mathrm{III}}\, y''_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{IV}}\, y'' + f_{\mathrm{III}y} \cdot y' + f_{\mathrm{II}y} + f_{\mathrm{III}x} = 0 \qquad (10{,}1)\\
&f_{\mathrm{II}}\, y''_{\mathrm{III}} + 3 f_{\mathrm{III}}\, y''_{\mathrm{II}} + 3 f_{\mathrm{IV}}\, y''_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{V}} y'' + f_{\mathrm{IV}y} \cdot y' + 2 f_{\mathrm{III}y} + f_{\mathrm{IV}x} = 0\\
&f_{\mathrm{II}}\, y''_{\mathrm{IV}} + 4 f_{\mathrm{III}}\, y''_{\mathrm{III}} + 6 f_{\mathrm{IV}}\, y''_{\mathrm{II}} + 4 f_{\mathrm{V}}\, y''_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{VI}}\, y'' + f_{\mathrm{V}y}\, y' +\\
&+ 3 f_{\mathrm{IV}y} + f_{\mathrm{V}x} = 0
\end{aligned}$$

Um die invariante Bedeutung von $y''_{\mathrm{IV}} = 0$ zu ermitteln, benützen wir ein Koordinatensystem der Längen und Breiten und setzen y und y' gleich Null. Wir erhalten dann $y''_{\mathrm{I}} = 0$, und nach Elimination von y''_{II} und y''_{III}:

$$\bar{\bar{y}}''_{\mathrm{IV}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & \bar{\bar{f}}_{\mathrm{III}x} \\ 3\bar{\bar{f}}_{\mathrm{III}} & 1 & \bar{\bar{f}}_{\mathrm{IV}x} + 2\bar{\bar{f}}_{\mathrm{III}y} \\ 6\bar{\bar{f}}_{\mathrm{IV}} & 4\bar{\bar{f}}_{\mathrm{III}} & \bar{\bar{f}}_{\mathrm{V}x} + 3\bar{\bar{f}}_{\mathrm{IV}y} \end{vmatrix}$$

Aus der Formel (6,2) für den Hauptskalar und der Differentiation nach dem Winkel $\dfrac{\partial y'}{\partial \theta} = \dfrac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_{y'y'}}}$ entnehmen wir

$$\begin{aligned}
&2\bar{\bar{\mathfrak{J}}} = \bar{\bar{f}}_{\mathrm{III}}\\
&2\bar{\bar{\mathfrak{J}}}_\theta - 3 + 6\bar{\bar{\mathfrak{J}}}^2 = \bar{\bar{f}}_{\mathrm{IV}}\\
&2\bar{\bar{\mathfrak{J}}}_{\theta\theta} + 20\bar{\bar{\mathfrak{J}}}\bar{\bar{\mathfrak{J}}}_\theta - 28\bar{\bar{\mathfrak{J}}} + 24\bar{\bar{\mathfrak{J}}}^3 = \bar{\bar{f}}_{\mathrm{V}}
\end{aligned}$$

[16] Siehe in der genannten Arbeit von *Thomson* angegebene Literatur, insbesondere *S. Lie*: Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x und y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten, III. Ges. Werke, 362. Ferner *W. Blaschke*: Geometrie der Gewebe, Springer, Berlin (1938), insbesondere § 29.

und somit

$$-\frac{1}{2}\overline{\overline{y}}_{\text{IV}} = \overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{\theta\theta s} + 3\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{\theta b} + 2\overline{\overline{\mathfrak{I}}}\,\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{\theta s} - 2\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{\theta}\,\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{s} + 4\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{s} + 2\overline{\overline{\mathfrak{I}}}\,\overline{\overline{\mathfrak{I}}}_{b}$$

Bezeichnen wir die auf der rechten Seite stehende Invariante mit Ω, so ist offenbar

$$\Omega = 0 \tag{10,2a}$$

die gesuchte Gleichung. Vergleichen wir die Koeffizienten von f in y''_{IV} und Ω, wenn wir ein beliebiges Koordinatensystem zugrunde legen, so erhalten wir[17]

$$\Omega = -\frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} f_{y'y'}^{-\frac{3}{2}} \cdot y''_{\text{IV}} \tag{10.2b}$$

11. Invariante Kennzeichnung von Variationsproblemen mit geradlinigen Extremalen.

Durch eine Punkttransformation der Form

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \eta = \eta(x, y) \tag{11,1}$$

möge die Differentialgleichung der Extremalen von der Form

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

übergehen in eine Differentialgleichung von der Form[16]

$$y' = \bar{y}' + \frac{\bar{y}''_{\text{I}}}{1!}y' + \frac{\bar{y}''_{\text{II}}}{2!}y'^2 + \frac{\bar{y}''_{\text{III}}}{3!}y'^3$$

wobei

$$-\bar{y}'' = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_{xx} \\ \eta_x & \eta_{xx} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{11,2}$$

$$-\bar{y}''_{\text{I}} = \frac{1}{\Delta}\left\{ 2\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_{xy} \\ \eta_x & \eta_{xy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_y & \xi_{xx} \\ \eta_y & \eta_{xx} \end{vmatrix} \right\}$$

$$-\frac{\bar{y}''_{\text{II}}}{2!} = \frac{1}{\Delta}\left\{ 2\begin{vmatrix} \xi_y & \xi_{xy} \\ \eta_y & \eta_{xy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_{yy} \\ \eta_x & \eta_{yy} \end{vmatrix} \right\}$$

$$-\frac{\bar{y}''_{\text{III}}}{3!} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_y & \xi_{yy} \\ \eta_y & \eta_{yy} \end{vmatrix}$$

[17] Andere übersichtlichere Formen dieser Formel, die man durch Anwendung der *Cartan*schen Vertauschungsformel erzielen kann, wurden von *Berwald* direkt auf einem anderen Weg abgeleitet. Vgl. Fußnote 1.

Nun wollen wir voraussetzen, x und y seien projektive Polarkoordinaten, dann können wir auch noch annehmen, daß die Extremalen $y = \text{const.}$ durch die zu (11,1) inverse Transformation in $\eta = \text{const.}$ übergeführt werden, d. h. also, es sei

$$\eta = \chi(y) \qquad \eta_x = 0$$

Da nun bei projektiven Polarkoordinaten stets $\bar{y}'' = 0$, $\bar{y}''_{\text{I}} = 0$ ist, folgt aus (11,2)

$$\xi_{xx} = 0 \qquad \xi = \varphi(y)\, x + \psi(y)$$

$$-\frac{\bar{y}''_{\text{II}}}{2!} = \frac{-2\varphi'\chi' + \varphi\chi''}{\varphi\chi'} \tag{11,3}$$

$$-\frac{\bar{y}''_{\text{III}}}{3!} = \frac{x(\varphi'\chi'' - \varphi''\chi') + \psi'\chi'' - \psi''\chi'}{\varphi\chi'}$$

Andererseits folgt aus (9,8), (10,1) und (9,7):

$$\bar{y}''_{\text{II}} = -\bar{f}_{\text{III}x}, \quad \bar{y}''_{\text{III}} = -3\bar{f}_{\text{III}}\bar{y}''_{\text{II}} - 2\bar{f}_{\text{III}y} - \bar{f}_{\text{IV}x}.$$

Vergleichen wir mit (11,3), so ergibt sich

$$\bar{f}_{\text{III}xx} = 0 \qquad \bar{f}_{\text{IV}xxx} = 0. \tag{11,4}$$

Unsere Aufgabe ist somit darauf zurückgeführt, die invariante Bedeutung dieser letzten beiden Gleichungen festzustellen.

12. Invariante Bedeutung von $\bar{f}_{\text{III}xx}$ und $\bar{f}_{\text{IV}xxx}$.

Um die hier vorliegende Aufgabe durchzuführen, benötigen wir zunächst die Ausdrücke für den Hauptskalar und für das Krümmungsmaß in projektiven Polarkoordinaten. Um die Formel für den Hauptskalar zu erhalten, setzen wir zur Abkürzung

$$\bar{f}^{-\frac{1}{2}} = g, \quad \mathfrak{H} \cdot g = u, \quad \bar{f}_{y'}\bar{f}^{-1} = \bar{f}_{y'} \cdot g^2 = v, \quad \bar{f}_{y'y'y'} = w \tag{12,1}$$

dann folgt aus (6,2)

$$w = 2u - 3v \tag{12,2}$$

Die Formel für das Krümmungsmaß ergibt sich mit $\pi = x$ aus der *Schwarz*'schen Differentialgleichung (7,1). Wir erhalten

$$\frac{d\pi}{ds} = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\bar{f}} = g^2 \tag{12,3}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)_{ss} + \frac{\bar{\mathfrak{K}}}{g} = 0$$

$$\bar{\mathfrak{K}} = g_{xx} \cdot g^3.$$

und hieraus erhalten wir die leicht zu beweisende Identität

$$(\overline{\Phi}\, g)_{xx} \cdot g^3 = \overline{\Phi}_{ss} + \overline{\Re}\, \overline{\Phi} \tag{12,4}$$

Wenden wir sie an auf $\overline{\Phi} = \overline{\Im}$, so erhalten wir nach (8,7)

$$u_{xx} = -\frac{\overline{\Re}_\theta}{g^3} \qquad u_{xxx} = -\frac{\overline{\Re}_{\theta s}}{g^5} + 3\,\frac{\overline{\Re}_\theta}{g^4}\, g_x. \tag{12,5}$$

Bevor wir die Bedeutung von v_{xx} feststellen, besprechen wir zunächst die Bedeutung von v. Setzt man

$$\int_{-\infty}^{x} f\,(x, y, 0)\, dx = s\,(x, y)$$

so wird nach den *Hamilton*'schen Formeln

$$s_x = (f - y'\, f_{y'})_{y' = 0} = \bar{f} \qquad s_y = \bar{f}_{y'}$$

und somit

$$v = \frac{s_y}{s_x} = ctg\, \psi \tag{12,6}$$

wo ψ der Winkel zwischen Extremalen und Transversalen ist.

Nun führen wir an Stelle von x als unabhängig Veränderliche s ein. Wenn s als unabhängig Veränderliche gemeint ist, so möge partielle Ableitung nach y mit $\frac{\partial}{\partial y}$ bezeichnet werden, wenn dagegen x als unabhängig Veränderliche gelten soll, sei die partielle Ableitung nach y mit $(\,)_y$ bezeichnet.

Aus

$$s\,[x\,(s, y), y] = s$$

folgt dann

$$s_x \frac{\partial x}{\partial y} + s_y = 0$$

somit nach (12,6)

$$v = -\frac{\partial x}{\partial y}$$

Nun differenzieren wir die *Schwarz*'sche Differentialgleichung (7,1) mit $\pi = x$ nach y und erhalten wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(x_s)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\; x_s^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\,(x_s) = -\frac{1}{2}\; \bar{f}^{5/3}\, v_s$$

$$(\bar{f}^{5/3}\, v_s)_{ss} + \overline{\Re}\, \bar{f}^{5/3}\, v_s + 2\,\frac{\partial \overline{\Re}}{\partial y}\, \bar{f}^{5/3} = 0$$

oder mit Benützung der Identität (12,4) für $\Phi = \dfrac{v_s}{g^3} = \dfrac{v_x}{g}$

$$g^3 v_{xxx} = -2 \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y} \cdot \frac{1}{g}$$ [18]

oder, wenn wir auch auf der rechten Seite an Stelle von s wieder x als unabhängig Veränderliche einführen

$$v_{xxx} = -2 (\overline{\mathfrak{K}}_y - \overline{\mathfrak{K}}_x v) \cdot \frac{1}{g^4} \tag{12,7}$$

Bei projektiven Polarkoordinaten erhalten wir unter Berücksichtigung von (3,2), (3.5), (9,7)

$$\overline{\mathfrak{K}}_b = -v \overline{\mathfrak{K}}_x g + \overline{\mathfrak{K}}_y g + \overline{\mathfrak{K}}_\theta \cdot g \cdot g_x$$

also nach (12,7)

$$g^5 v_{xxx} = -2 (\overline{\mathfrak{K}}_b - \overline{\mathfrak{K}}_\theta g g_x) \tag{12,8}$$

somit ergibt sich aus (12,2), (12,5), (12,8):

$$g^5 w_{xxx} = 6 (\overline{\mathfrak{K}}_b - \frac{1}{3} \overline{\mathfrak{K}}_{\theta s}) \tag{12,9}$$

Aus der Potenzreihenentwicklung (9,1) für f und der Definition für u folgt

$$\lim_{x \to -\infty} (u + \overline{\mathfrak{J}}^0 \cdot x - \overline{\mathfrak{J}}^0_s) = 0$$

ebenso aus (12,6) und (9,1) für v

$$\lim_{x \to -\infty} v = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{3} \overline{\mathfrak{K}}^0_\theta \frac{1}{x^3} + \dots}{\frac{1}{x^2} + \dots} = 0 \tag{12,10}$$

Somit wird nach (12,9):

$$w = \bar{I}_{III} = -2 \overline{\mathfrak{J}}^0 \cdot x + 2 \overline{\mathfrak{J}}^0_s + 6 \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} (\mathfrak{K}_b - \frac{1}{3} \overline{\mathfrak{K}}_{\theta s}) \bar{f}^{5/2} \, dx \, dx \, dx$$

$$= -2 \overline{\mathfrak{J}}^0 \cdot x + 2 \overline{\mathfrak{J}}^0_s + \frac{1}{4 x^2} (\overline{\mathfrak{K}}_b - \frac{1}{3} \overline{\mathfrak{K}}_{\theta s})^0 + \dots \tag{12,11}$$

---

[18] Auf Grund dieser Gleichung, der angegebenen geometrischen Bedeutung von v läßt sich leicht ein Satz von *Berwald* beweisen: Über eine charakteristische Eigenschaft der allgemeinen Räume konstanter Krümmung mit geradlinigen Extremalen. Monatshefte f. Math. u. Phys. 36 (1929), 315, und *P. Funk*: Über zweidimensionale *Finsler*sche Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. 40 (1935), 86—93.

Wir sehen nun: die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der ersten Gleichung (11,4) ist

$$\overline{\mathfrak{K}}_b - \frac{1}{3}\,\overline{\mathfrak{K}}_{\theta s} = 0. \tag{12,12}$$

Wir wollen nun zeigen, daß dieselbe Bedingung auch für das Bestehen der zweiten Gleichung (11,4) hinreichend ist. Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Legt man ein System projektiver Polarkoordinaten zugrunde, und ist $\overline{H}$ eine invariante Funktion des Linienelements, dann ist auch

$$(\overline{H}\, g^{\nu})^{(\nu+1)}\, \bar{g}^{\nu+2}, \qquad (\quad)^{(\nu+1)} = \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x^{\nu+1}}$$

eine invariante Funktion des Linienelements.

Um diesen Satz zu zeigen, wollen wir zwei Systeme von projektiven Polarkoordinaten voraussetzen. Das eine habe den Pol Π_0 und die Koordinaten X, Y, das andere habe den Pol P_0 und die Koordinaten x, y. Für die Länge möge gelten:

$$s = \int f(X, Y, Y')\, dX \text{ bzw. } s = \int \varphi(x, y, y')\, dx.$$

Analog zu $\overline{f}^{-\frac{1}{2}} = g$ führen wir ein $\overline{\varphi}^{-\frac{1}{2}} = \gamma$.

Die Gleichung der Extremalen $\Pi_0 P_0$ sei

$$y = 0 \text{ bzw. } Y = 0.$$

Für die Beziehung zwischen X und x folgt dann für $Y = y = 0$ aus der Definition des projektiven Maßes durch einmaliges bzw. zweimaliges Differenzieren von

$$-\frac{1}{x} = \frac{\alpha(X - X_0)}{1 + \beta(X - X_0)} \tag{12,13}$$

nach X an der Stelle $X = X_0$:

$$\alpha = f(X_0\, 0\, 0) \qquad \alpha\beta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X = X_0}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha\,(X - X_0)^2 = \frac{\overline{\overline{\varphi}}}{\overline{\overline{f}}} = \frac{\overline{\overline{g^2}}}{\overline{\overline{\gamma^2}}} \tag{12,14}$$

wobei $X = X_0$ den Pol P_0 kennzeichnet.

Ist nun H eine Invariante, die wir uns in P_0 nach Potenzen des projektiven Maßes entwickelt denken, so gilt für $\overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{\gamma^{\nu}}}$ eine Entwicklung von der Form

$$\overline{\overline{H}} \,.\, \overline{\overline{\gamma^\nu}} = \mathfrak{P}_\nu(x) + \frac{\delta}{x} + \mathfrak{R}_2\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (12{,}15)$$

wobei $\mathfrak{P}_1$ ein Polynom ν-ten Grades in x, $\mathfrak{R}_2$ eine Potenzreihe in $(1/x)$ bedeutet, die mit der zweiten Potenz beginnt. Es ist dann vgl. (9,1)

$$-(\nu+1)!\,\delta = \lim_{x \to -\infty} \gamma^{\nu+2} \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x^{\nu+1}} (\overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{\gamma^\nu}})$$

Gehen wir nun über zum Koordinatensystem X, Y, so ist wegen (12.14)

$$\overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{g^\nu}} = \overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{\gamma}}^\nu\ \alpha^{\frac{\nu}{2}} (X - X_0)^\nu$$

oder wegen (12, 15)

$$\overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{g^\nu}} = \alpha^{\frac{\nu}{2}} [\mathfrak{P}_\nu^*(X - X_0) - \delta\,\alpha\,(X - X_0)^{\nu+1} + \mathfrak{R}_{\nu+2}(X - X_0)].$$

Indem wir $\nu+1$ — mal nach X differenzieren und dann $X = X_0$ setzen, erhalten wir

$$\left[\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial X^{\nu+1}} (\overline{H}\,\overline{\overline{g^\nu}})\right]_{X = X_0} = -(\gamma+1)!\,\alpha^{\nu/2+1}\,\delta$$

$$\overline{\overline{g}}^{\nu+2}\,[\ ]_{x=x_0} = -(\nu+1)!\,\delta$$

Da die rechte Seite von der Lage des Punktes Π_0 unabhängig ist und das Linienelement beliebig gewählt werden kann, ist unser Hilfssatz bewiesen.

Um die invariante Bedeutung von $\bar{f}_{\mathrm{IV}xxx}$ festzustellen, differenzieren wir den Ausdruck (6,2) für den Hauptskalar nach y' und eliminieren $f_{y'}$. Wir erhalten:

$$(\bar{f}_{\mathrm{IV}} - \frac{4}{3}\bar{f}^2_{\mathrm{III}}) \cdot g^{-2} = 2\,\bar{\mathfrak{I}}\theta - 3 + \frac{2}{3}\,\bar{\mathfrak{I}}^2 \quad [19]$$

Wegen der Invarianz der rechten Seite können wir unseren Hilfssatz mit $\nu = 2$ anwenden Wir erhalten

$$[\bar{g}^4 \frac{d^3}{dX^3} (\bar{f}_{\mathrm{IV}} - \frac{4}{3}\bar{f}^2_{\mathrm{III}})]_{X = X_0} = \lim_{x \to -\infty} \bar{\gamma}^4 \frac{d^3}{dx^3} (\varphi_{\mathrm{IV}} - \frac{4}{3}\varphi^2_{\mathrm{III}})$$

Nun ist wegen (3,5)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_{\mathrm{III}xxx}\varphi^{-5/2}) = [\varphi_{\mathrm{IV}xxx}\varphi^{-2} - \frac{5}{2}(\varphi_{\mathrm{III}xxx}\varphi^{-5/2})(\varphi^{-1}\varphi_{\mathrm{I}})\varphi^{1/2}]\,\varphi_{\mathrm{II}}^{-1/2}$$

[19] Von dieser Gleichung aus kann man das Ergebnis dieses Paragraphen auch durch direkte Rechnung bestätigen, indem man öfters die *Cartan*sche Vertauschungsformeln benützt.

Man beachte, daß für $y' = 0$ im zweiten Glied der erste Faktor wegen (12,9) eine Invariante ist und der zweite Faktor wegen (12,1) und (12,10), der dritte wegen (9,1) mit $x \to -\infty$ gegen Null konvergieren. Ferner ist nach (9,7) $\bar{\varphi}_{II} = 1$; somit wird wegen (12,9)

$$\lim_{P \to P_0} \bar{\bar{\varphi}}_{IVxxx} \bar{\bar{\varphi}}^{-2} = 6 \left(\bar{\bar{\mathfrak{K}}}^0{}_{b\theta} - \frac{1}{3} \bar{\bar{\mathfrak{K}}}^0{}_{\theta s\theta}\right)$$

Ferner folgt aus (12,11)

$$\lim_{P \to P_0} (\bar{\bar{\varphi}}_{III})^2_{xxx} \bar{\bar{\varphi}}^{-2} = 6 \left(\bar{\bar{\mathfrak{K}}}^0{}_b - \frac{1}{3} \bar{\bar{\mathfrak{K}}}^0{}_{\theta s}\right) \bar{\bar{\mathfrak{I}}}^0$$

Wir erhalten also, wenn wir X_0 durch X ersetzen und die willkürliche Wahl des Linienelements berücksichtigen

$$\bar{\bar{f}}_{IVxxx} = \frac{4}{3} \bar{\bar{(f^2}}_{III})_{xxx} + \bar{\bar{f}}^2 \left[6 \left(\bar{\bar{\mathfrak{K}}}_{b\theta} - \frac{1}{3} \bar{\bar{\mathfrak{K}}}_{\theta s\theta}\right) - 8 \left(\bar{\bar{\mathfrak{K}}}_b - \frac{1}{3} \bar{\bar{\mathfrak{K}}}_{\theta s}\right) \bar{\bar{\mathfrak{I}}}\right]$$

Diese Formel läßt unmittelbar erkennen, daß gleichzeitig mit $\mathfrak{K}_b - \frac{1}{3} \mathfrak{K}_{\theta s}$ und $\bar{f}_{IIIxx}$ auch $\bar{f}_{IVxxx}$ identisch gleich Null sein muß.

13. Schlußbemerkung.

Wir gelangen also zum Schlußergebnis:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich ein ebenes Variationsproblem in ein solches mit geradlinigen Extremalen transformieren läßt, sind (10,2) und (12,12).

In früheren Arbeiten habe ich versucht, die *Hilbert*'sche Geometrie[20] und einige damit verwandte Geometrien[21] vom differentialgeometrischen Standpunkt aus zu kennzeichnen, und zwar wurde dort diese Gattung von Geometrien gekennzeichnet durch die beiden Forderungen, daß die Extremalen gerade Linien sein sollen und daß das Krümmungsmaß eine Konstante sei. Die erste dieser beiden Forderungen hat aber nicht unmittelbar differentialgeometrischen Charakter, und diese Lücke war der Anlaß zur vorliegenden Arbeit. Unser Ergebnis zeigt, daß neben der Forderung der Konstanz des Krümmungsmaßes nur noch vom Hauptskalar zu fordern ist, daß er der Gleichung (10,2) genügt.

---

[20] *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, Anhang I.

[21] Siehe Anmerkung 11 und 17 und ferner: *P. Funk*: Über Geometrien, bei denen die Geraden die kürzesten Linien sind und die Aequidistanten zu einer Geraden wieder Gerade sind. Monatshefte für Math. u. Phys. 37 (1030).

Über vollständige Maße.

Von
Karl Mayrhofer, Wien.

(Eingelangt am 1. August 1947.)

Betrachtet man jene Eigenschaften eines Maßes im Sinne von *Carathéodory*, die unabhängig von der Forderung der Meßbarkeit der offenen Punktmengen des $\mathfrak{R}_n$ sind, so bleiben alle Sätze bestehen, wenn die n-dimensionalen Punktmengen durch abstrakte Mengen ersetzt werden, welche die Teile einer zugrundegelegten Menge sind. Damit entsteht die Frage nach dem Zusammenhange der so gebildeten Maße μ mit den üblichen abstrakten Maßen. Es ist leicht festzustellen, daß ein Maß μ stets ein vollständiges Maß im Sinne der abstrakten Maßtheorie ist, dessen Definitionsbereich eine größte Menge enthält. Umgekehrt braucht aber ein derartiges Maß m kein gewöhnliches Maß μ zu sein. Es gelingt jedoch im folgenden die Maße m durch ein zusätzliches einfaches Axiom (s. **1** V) gerade so einzuschränken, daß die Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Maßen μ erreicht wird.

Diese Betrachtungen stehen in engstem Zusammenhange mit der Frage, wann die *Carathéodory*'sche Definition der Meßbarkeit auf abstrakte Maße übertragen eine die Meßbarkeit kennzeichnende Bedingung wird. Dies braucht selbst für vollständige Maße nicht zuzutreffen, gilt aber unter der eben genannten Einschränkung.

Schließlich wird es möglich sein, die Äquivalenz für zwei wesentlich verschiedene Erklärungen der Meßbarkeit nach Lebesgue zu beweisen, wobei wieder jenes zusätzliche Axiom eine entscheidende Rolle spielt.

1. Vollständige Maße.

Es sei $m(\mathfrak{A}) = m$ eine eindeutige reelle Mengenfunktion, die endliche sowie unendliche Werte annehmen kann. Die Funktion m heißt eine *(abstrakte) Maßfunktion* oder ein *(abstraktes) Maß*, wenn sie die folgenden Forderungen erfüllt:

I. *Der Definitionsbereich $\mathfrak{a}_\sigma$ ist ein σ-Körper.*

II. *Es ist* $m \geqq 0$, ferner $m(0) = 0$.

III. m *ist volladditiv*, d. h. für je abzählbar viele[1] getrennte Mengen $\mathfrak{A}_\lambda$ aus $\varkappa_\sigma$ gilt

$$m\left(\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda\right) = \sum_\lambda m(\mathfrak{A}_\lambda).$$

Die Mengen aus $\varkappa_\sigma$ heißen die *m-meßbaren* oder kurz die *meßbaren Mengen*. Ist $m(\mathfrak{A}) = 0$, so heißt $\mathfrak{A}$ eine *m-Nullmenge* oder kurz eine *Nullmenge*.

Die einfachsten Eigenschaften der abstrakten Maße werden als bekannt vorausgesetzt[2].

Zu m gehören zwei weitere Mengenfunktionen $\overline{m}(\mathfrak{M}) = \overline{m}$ und $\underline{m}(\mathfrak{M}) = \underline{m}$, welche das *zu m gehörige äußere*, bzw. *innere Maß* heißen. Diese Funktionen brauchen aber keine Maßfunktionen zu sein, weshalb ich sie im Folgenden auch die *Außen-*, bzw. *Innenfunktion von m* nennen werde. Sie sind für jeden Teil $\mathfrak{M}$ einer jeden Menge aus $\varkappa_\sigma$ so definiert:

$$\overline{m}(\mathfrak{M}) = \inf m(\overline{\mathfrak{A}}),\ \underline{m}(\mathfrak{M}) = \sup m(\underline{\mathfrak{A}}); \tag{1}$$

dabei durchläuft $\overline{\mathfrak{A}}$ alle meßbaren Obermengen von $\mathfrak{M}$ und $\underline{\mathfrak{A}}$ alle meßbaren Teilmengen.

Hiernach sind m und $\underline{m}$ durchwegs endlich, falls dies von m gilt. Ferner ist stets

$$\underline{m}(\mathfrak{M}) \leqq \overline{m}(\mathfrak{M}) \tag{2}$$

und

$$\underline{m}(\mathfrak{M}) = \overline{m}(\mathfrak{M}) = m(\mathfrak{M}) \qquad \text{für } \mathfrak{M} \varepsilon \varkappa_\sigma; \tag{3}$$

letzteres besagt, daß die Funktionen $\overline{m}$, $\underline{m}$ Erweiterungen der Funktion m sind. Weiters gilt:

a) *Der Definitionsbereich von* $\overline{m}$ *ist ein* σ*-Körper* Λ_σ*; dieser besteht aus allen Teilen der einzelnen meßbaren Mengen.*

Λ_σ ist zugleich der Definitionsbereich von $\underline{m}$.

b) *Es ist* $\overline{m} \geqq 0$, *ferner ist* $\overline{m}(0) = 0$.

Dasselbe gilt von $\underline{m}$.

c) $\overline{m}$ *ist eine monoton wachsende Mengenfunktion*; d. h. aus $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \varepsilon \Lambda_\sigma$) folgt $\overline{m}(\mathfrak{L}) \leqq \overline{m}(\mathfrak{M})$.

Dasselbe gilt von $\underline{m}$.

---

[1] Abzählbar viele sind endlich oder abzählbar unendlich viele.

[2] S. *O. Haupt-G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung Bd. III, Berlin 1938, S. 7 bis 13.

d) *Für je abzählbar viele Mengen* $\mathfrak{M}_\lambda$ *aus* Λ_σ *mit der Summe* $\mathfrak{S}$ *gilt die Summenungleichung*

$$\overline{m}(\mathfrak{S}) \leqq \sum_\lambda \overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda). \tag{4}$$

Beweis. Die Ungleichung (4) gilt zunächst sicher, wenn einer der Summanden $\overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda)$ den Wert ∞ hat. Seien also alle $\overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda)$ endlich. Nach der Definition (1) von $\overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda)$ hat dann bei gewähltem $\varepsilon > 0$ jede Menge $\mathfrak{M}_\lambda$ eine meßbare Obermenge $\overline{\mathfrak{A}}_\lambda$, so daß

$$m(\overline{\mathfrak{A}}_\lambda) < \overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^\lambda}$$

ist. Zugleich ist $\sum_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\lambda$ meßbare Obermenge von $\mathfrak{S}$. Also gilt:

$$\overline{m}(\mathfrak{S}) \leqq m\left(\sum_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\lambda\right) \leqq \sum_\lambda m(\overline{\mathfrak{A}}_\lambda) \leqq \sum_\lambda \overline{m}(\mathfrak{M}_\lambda) + \varepsilon,$$

woraus (4) folgt.

Schließlich zeige ich: *Wird die meßbare Menge* $\mathfrak{A}$ *in zwei fremde Teile* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{A}-\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ *zerlegt, so ist*

$$m(\mathfrak{A}) = \overline{m}(\mathfrak{M}_1) + \underline{m}(\mathfrak{M}_2). \tag{5}$$

Beweis. Ist $\underline{\mathfrak{A}}_2$ ein beliebiger meßbarer Teil von $\mathfrak{M}_2$, so gilt

$$m(\mathfrak{A}) = m[(\mathfrak{A}-\underline{\mathfrak{A}}_2)+\underline{\mathfrak{A}}_2] = m(\mathfrak{A}-\underline{\mathfrak{A}}_2)+m(\underline{\mathfrak{A}}_2) \geqq \overline{m}(\mathfrak{M}_1) + m(\underline{\mathfrak{A}}_2).$$

Geht man im letzten Teile mit $m(\underline{\mathfrak{A}}_2)$ zur oberen Grenze über, so folgt

$$m(\mathfrak{A}) \geqq \overline{m}(\mathfrak{M}_1) + \underline{m}(\mathfrak{M}_2). \tag{6}$$

Ähnlich beweist man die entgegengesetzte Beziehung: Ist $\overline{\mathfrak{A}}_1$ eine beliebige meßbare Obermenge von $\mathfrak{M}_1$, so gilt

$$\begin{aligned} m(\mathfrak{A}) &\leqq m(\overline{\mathfrak{A}}_1 + \mathfrak{A}) = m[\overline{\mathfrak{A}}_1 + (\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{A}}_1)] \\ &= m(\overline{\mathfrak{A}}_1) + m(\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{A}}_1) \leqq m(\overline{\mathfrak{A}}_1) + \underline{m}(\mathfrak{M}_2). \end{aligned}$$

Geht man im letzten Teile mit $m(\overline{\mathfrak{A}}_1)$ zur unteren Grenze über, so entsteht

$$m(\mathfrak{A}) \leqq \overline{m}(\mathfrak{M}_1) + \underline{m}(\mathfrak{M}_2). \tag{7}$$

Aus (6), (7) entnimmt man (5).

Nach (3) *ist für die Meßbarkeit einer Menge* $\mathfrak{M}$ *aus* Λ_σ *notwendig, daß*

$$\underline{m}(\mathfrak{M}) = \overline{m}(\mathfrak{M}) \tag{8}$$

ist. — Ich zeige an einem Beispiel, *daß dies nicht hinreichend zu sein braucht, und zwar auch dann nicht, wenn* $\overline{m}(\mathfrak{M})$ *endlich ist.*

Beispiel 1. Der Grundbereich der Mengenbildung bestehe aus den Elementen 1, 2, 3. Seine Mengen seien mit

$$0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_{1\,2}, \mathfrak{A}_{1\,3}, \mathfrak{A}_{2\,3}, \mathfrak{A}_{1\,2\,3} \tag{9}$$

bezeichnet; dabei ist z. B. $\mathfrak{A}_{1\,2} = \{1, 2\}$. Das Mengensystem

$$\{0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{2\,3}, \mathfrak{A}_{1\,2\,3}\}$$

ist dann ein σ-Körper $\varkappa_\sigma$, auf dem durch die Festsetzung

$$m(0) = 0,\ m(\mathfrak{A}_1) = 1,\ m(\mathfrak{A}_{2\,3}) = 0,\ m(\mathfrak{A}_{1\,2\,3}) = 1$$

ein endliches Maß definiert wird. Der Definitionsbereich Λ_σ der zu m gehörigen Funktionen $\overline{m}$, $\underline{m}$ besteht aus den Mengen (9). Man prüft sofort nach, daß die nicht meßbaren Mengen aus Λ_σ durchwegs die Gleichung (8) erfüllen; so ist etwa

$$\underline{m}(\mathfrak{A}_2) = \overline{m}(\mathfrak{A}_2) = 0.$$

Weiters ist für die Meßbarkeit einer Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ notwendig, daß bei beliebigem $\mathfrak{L}$ aus Λ_σ gilt:

$$\overline{m}(\mathfrak{L}) = \overline{m}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M})\ ^3. \tag{10}$$

Beweis. Sei also $\mathfrak{M}$ meßbar. Ist dann $\mathfrak{M}'$ eine gewählte meßbare Obermenge von $\mathfrak{L}-\mathfrak{M}$, so sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'-\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$ fremde meßbare Obermengen von $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{L}-\mathfrak{M}$. Bedeutet noch $\mathfrak{A}$ eine beliebige meßbare Obermenge von $\mathfrak{L}$, so gilt also

$$m(\mathfrak{A}) \geqq m[\mathfrak{A}(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})] = m(\mathfrak{A}\mathfrak{M}) + m(\mathfrak{A}\mathfrak{N}) \geqq \overline{m}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M}).$$

Geht man links zur unteren Grenze über, so entsteht nach der Definition (1)

$$\overline{m}(\mathfrak{L}) \geqq \overline{m}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M}).$$

Beachtet man, daß nach (4) noch

$$\overline{m}(\mathfrak{L}) \leqq \overline{m}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M})$$

ist, so hat sich (10) ergeben.

Daß umgekehrt die Bedingung (10) *für die Meßbarkeit einer Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ nicht hinzureichen braucht, und zwar auch dann nicht, wenn $\overline{m}(\mathfrak{M})$ endlich ist*, sieht man an der nicht meßbaren Menge $\mathfrak{A}_2$ des Beispiels 1. Hierzu hat man wegen $\overline{m}(\mathfrak{A}_2) = 0$ nur die Gültigkeit von

$$\overline{m}(\mathfrak{L}) = \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{A}_2) \tag{11}$$

nachzuprüfen, wenn $\mathfrak{L}$ die Mengen (9) durchläuft (die alle ein endliches äußeres Maß haben müssen); dabei kann man sich auf die zu $\mathfrak{A}_2$ nicht fremden $\mathfrak{L}$ beschränken, also auf $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_{1\,2}, \mathfrak{A}_{2\,3}, \mathfrak{A}_{1\,2\,3}$. Für diese ist nun (11) in der Tat erfüllt, wie man sofort feststellt.

---

[3] Wegen (4) ist dies stets richtig, falls $\overline{m}(\mathfrak{L}) = \infty$ ist.

Die Bedingung (10) wurde von *C. Carathéodory* in seiner Maßtheorie zur Definition der Meßbarkeit verwendet[4].

Das Maß m ($\mathfrak{A}$) heißt *vollständig*, wenn es die folgende Forderung erfüllt:

IV. *Jede Menge $\mathfrak{M}$ aus $\Lambda\sigma$, die sich zwischen zwei meßbaren Mengen von beliebig maßkleiner Differenz einschließen läßt, ist selber meßbar.* — Anders ausgedrückt:

Jede Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ, für die es bei beliebigem $\varepsilon > 0$ meßbare Mengen $\underline{\mathfrak{A}}_\epsilon$, $\overline{\mathfrak{A}}_\epsilon$ gibt, so daß

$$\underline{\mathfrak{A}}_\epsilon \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}_\epsilon, \quad m\,(\overline{\mathfrak{A}}_\epsilon - \underline{\mathfrak{A}}_\epsilon) < \varepsilon \tag{12}$$

gilt, ist selber meßbar.

Die Forderung IV ist gleichwertig mit einer jeden der drei folgenden[5]:

IV_1. *Jede Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ, die sich zwischen zwei meßbaren Mengen einschließen läßt, deren Differenz eine Nullmenge ist, ist selber meßbar.*

IV_2. *Jeder Teil einer Nullmenge ist meßbar* (und damit Nullmenge).

IV_3. *Jede Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ, für die $\overline{m}$ ($\mathfrak{M}$) $= 0$ ist, ist meßbar* (und damit Nullmenge).

Satz 1. Es sei m ein vollständiges Maß. Dann ist für die Meßbarkeit einer Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ notwendig, daß (8) *gilt; diese Bedingung ist hinreichend, falls $\overline{m}$ ($\mathfrak{M}$) endlich ist.*

---

[4] *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1918, S. 246.

[5] Ein Beweis für die Äquivalenz von IV mit IV_1 und IV_2 findet sich bei *O. Haupt-G. Aumann*, [2]) 1. 4. (S. 20 und 21). — Daß IV und IV_1 äquivalent sind, ergibt sich hiernach so: Wenn IV gilt, so gilt erst recht IV_1. Umgekehrt gelte IV_1. Ist dann $\mathfrak{M}$ eine Menge aus Λ_σ, für die es zu jedem $\epsilon > 0$ meßbare Mengen $\underline{\mathfrak{A}}_\varepsilon$, $\overline{\mathfrak{A}}_\varepsilon$ gibt, so daß (12) gilt, so kann man insbesondere $\epsilon = \epsilon_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) mit $\epsilon_\lambda \to 0$ wählen. Bildet man dann mit zugehörigen Mengen $\underline{\mathfrak{A}}_{\varepsilon_\lambda}$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\varepsilon_\lambda}$ die meßbaren Mengen $\underline{\mathfrak{A}} = \sum_\lambda \underline{\mathfrak{A}}_{\epsilon_\lambda}$, $\overline{\mathfrak{A}} = \prod_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_{\epsilon_\lambda}$, so wird

$$\underline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{A}},\ m\,(\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}}) < \epsilon_\lambda\ (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Da letzteres nur möglich ist, wenn $\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}}$ Nullmenge ist und IV_1 gelten soll, muß also $\mathfrak{M}$ meßbar sein.

Weiters ist IV_1 mit IV_2 äquivalent. Wenn IV_1 gilt, so gilt sichtlich auch IV_2. Umgekehrt gelte IV_2. Ist dann $\mathfrak{M}$ eine Menge aus Λ_σ, zu der es meßbare Mengen $\underline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ gibt, so daß

$$\underline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{A}},\ m\,(\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}}) = 0$$

ist, so ist $\mathfrak{M} - \underline{\mathfrak{A}}$ als Teil der Nullmenge $\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}}$ nach IV_2 meßbar und damit auch $\mathfrak{M} = \underline{\mathfrak{A}} + (\mathfrak{M} - \underline{\mathfrak{A}})$.

Schließlich ist IV mit IV_3 äquivalent. Mit IV gilt sichtlich IV_3. Umgekehrt gilt mit IV_3 zunächst sichtlich IV_2 und damit IV.

Es ist nur der zweite Teil zu beweisen. Hierzu beachte ich, daß es nach (1) zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $\underline{\mathfrak{A}}_\varepsilon = \underline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}}_\varepsilon = \overline{\mathfrak{A}}$ aus $\varkappa_\sigma$ gibt, so daß gilt:

$$\underline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{A}},\ \underline{m}(\mathfrak{M}) - \frac{\epsilon}{2} < m(\underline{\mathfrak{A}}) \leqq m(\overline{\mathfrak{A}}) < \overline{m}(\mathfrak{M}) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da hieraus wegen (8) die Beziehungen (12) folgen und m vollständig ist, muß $\mathfrak{M}$ meßbar sein.

Die Gültigkeit von (8) für die nicht meßbare Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_2$ im Falle des Maßes m aus Beispiel 1 ist also nur so möglich, daß dieses Maß nicht vollständig ist. In der Tat ist IV_2 nicht erfüllt, da z. B. die Nullmenge $\mathfrak{A}_{2\,3}$ den nicht meßbaren Teil $\mathfrak{A}_2$ enthält.

Daß im Falle $\overline{m}(\mathfrak{M}) = \infty$ die Bedingung (8) auch bei einem vollständigen Maße m für die Meßbarkeit von $\mathfrak{M}$ nicht hinreichend zu sein braucht, zeigt das folgende

Beispiel 2. Auf dem σ-Körper $\varkappa_\sigma$ des Beispiels 1 wird durch die Festsetzung

$$m(0) = 0,\ m(\mathfrak{A}_1) = \infty,\ m(\mathfrak{A}_{2\,3}) = 1,\ m(\mathfrak{A}_{1\,2\,3}) = \infty$$

ein Maß m definiert; dieses ist nach IV_2 vollständig. Trotzdem etwa die Menge $\mathfrak{A}_{1\,2}$ nicht meßbar ist, gilt für sie

$$\underline{m}(\mathfrak{A}_{1\,2}) = \overline{m}(\mathfrak{A}_{1\,2}) = \infty.$$

Satz 2. Es sei m ein vollständiges Maß. Dann ist für die Meßbarkeit einer Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ notwendig, daß (10) *bei beliebigem $\mathfrak{L}$ aus Λ_σ gilt; diese Bedingung ist hinreichend, falls $\overline{m}(\mathfrak{M})$ endlich ist.*

Es ist nur der zweite Teil zu beweisen. Hierzu wähle ich für $\mathfrak{L}$ eine meßbare Obermenge von $\mathfrak{M}$ endlichen Maßes; damit geht (10) über in

$$m(\mathfrak{L}) = \overline{m}(\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M}). \tag{13}$$

Daneben gilt nach (5)

$$m(\mathfrak{L}) = \underline{m}(\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}-\mathfrak{M}). \tag{14}$$

Da aus (13), (14) die Gleichung $\underline{m}(\mathfrak{M}) = \overline{m}(\mathfrak{M})$ folgt, ist $\mathfrak{M}$ nach Satz 1 meßbar.

Daß die nicht meßbare Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_2$ im Falle des Maßes m aus Beispiel 1 die Bedingung des Satzes 2 erfüllt, ist wieder nur so möglich, daß dieses Maß nicht vollständig ist.

Daß im Falle $\overline{m}(\mathfrak{M}) = \infty$ die Bedingung des Satzes 2 auch bei vollständigen Maßen für die Meßbarkeit von $\mathfrak{M}$ nicht hinreichend zu sein braucht, zeigt das

Beispiel 3. Auf dem Körper $\varkappa_\sigma$ des Beispiels 1 wird durch die Festsetzung

$$m(0) = 0,\ m(\mathfrak{A}_1) = 1, \quad m(\mathfrak{A}_{2\,3}) = \infty, \quad m(\mathfrak{A}_{1\,2\,3}) = \infty$$

ein Maß m definiert; dieses ist nach IV_2 vollständig. Für die nicht meßbaren Mengen aus Λ_σ ist:

$$\overline{m}(\mathfrak{A}_2) = \overline{m}(\mathfrak{A}_3) = \overline{m}(\mathfrak{A}_{1\,2}) = \overline{m}(\mathfrak{A}_{1\,3}) = \infty.$$

Man prüft sofort nach, daß sie alle die Gleichung (10) erfüllen, wenn $\mathfrak{L}$ die Mengen (9) endlichen äußeren Maßes durchläuft, d. i. 0 und $\mathfrak{A}_1$. Da (10) für $\mathfrak{L} = 0$ jedenfalls erfüllt ist, verbleibt also nur $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_1$ einzusetzen. Wählt man dann etwa $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_{1\,2}$, so wird

$$\overline{m}(\mathfrak{L}) = 1,\ \overline{m}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L} - \mathfrak{M}) = 1.$$

Es entsteht nun die Aufgabe, diejenigen vollständigen Maße zu kennzeichnen, für welche die „*Carathéodory*'sche Bedingung" (10) für die Meßbarkeit stets hinreicht. Da dies auf eine passende Ergänzung des Axiomensystems hinauskommt, liegt es nahe, im Bestande der *Carathéodory*'schen Maßtheorie nach einfachen Sätzen zu suchen, deren Übertragung auf vollständige Maße nicht zu beweisen gelingt. Ein solcher — auf ein abstraktes Maß m übertragen — ist der folgende:

V. *Zu jeder nicht meßbaren Menge* $\mathfrak{M}$ *aus* Λ_σ *gibt es eine meßbare Menge* $\mathfrak{A}$ *endlichen Maßes, so daß* $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ *nicht meßbar ist*[6].

Dieser Satz braucht in der Tat für ein vollständiges Maß gar nicht zu gelten, wie wieder das Beispiel 3 zeigt: in diesem Beispiele hat ja keine der nicht meßbaren Mengen $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_{1\,2}$, $\mathfrak{A}_{1\,3}$ einen nicht meßbaren Teil endlichen äußeren Maßes. — Damit ist folgendes festgestellt:

Satz 3. Die Aussage V *ist von den Axiomen* I *bis* IV *unabhängig.*

Schränkt man nun die vollständigen Maße dahin ein, daß neben I bis IV noch V als Axiom gelten soll, so kann man zeigen, daß die Bedingung (10) in jedem Falle für die Meßbarkeit von $\mathfrak{M}$ hinreicht. — Es gilt also der folgende

Satz 4. Ist m *ein vollständiges Maß, welches die Forderung* V *erfüllt, und* $\mathfrak{M}$ *irgend eine Menge aus* Λ_σ, *die der Carathéodory'schen Bedingung* (10) *genügt*[7], *so ist* $\mathfrak{M}$ *meßbar.*

Beweis. Wäre $\mathfrak{M}$ nicht meßbar, so gäbe es nach V eine Menge $\mathfrak{L}_0$ endlichen Maßes, so daß $\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}$ ebenfalls nicht meßbar und damit nach Satz 1 und nach (2)

$$\underline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}) < \overline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M})$$

---

[6] S. *H. Hahn*, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1921, S. 436, Satz VIII.

[7] Hierbei hat also $\mathfrak{L}$ alle Mengen aus Λ_σ oder auch nur die endlichen äußeren Maßes zu durchlaufen (s. [3]).

wäre. Damit ergibt sich wegen (5)

$$m(\mathfrak{L}_0) = \underline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{M}) < \overline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}) + \overline{m}(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{M})$$

im Widerspruch zu der mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$ gebildeten Gleichung (10).

Diesem Beweise entnimmt man noch, *daß es für die Meßbarkeit von* $\mathfrak{M}$ *bereits hinreicht, wenn* (10) *für jede meßbare Menge* $\mathfrak{L}$ *endlichen Maßes gilt*[8].

Hierzu gilt die folgende Umkehrung: *Es sei m ein vollständiges Maß. Wenn dann jede Menge* $\mathfrak{M}$ *aus* Λ_σ, *für die* (10) *bei beliebigem meßbaren* $\mathfrak{L}$ *endlichen Maßes erfüllt ist, meßbar ist, so muß m die Eigenschaft* V *haben.*

Beweis. Dies gilt zunächst in trivialer Weise, wenn alle Mengen aus Λ_σ meßbar sind. — Andernfalls sei $\mathfrak{M}_0$ eine nicht meßbare Menge aus Λ_σ. Es gibt dann wegen der Voraussetzung und der Summenungleichung (4) eine meßbare Menge $\mathfrak{L}_0$ endlichen Maßes, für die

$$m(\mathfrak{L}_0) < \overline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}_0) + \overline{m}(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{M}_0) \tag{15}$$

ist. Hierin kann $\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}_0$ nicht meßbar sein, da es sonst auch $\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{L}_0 - \mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}_0$ wäre und damit

$$m(\mathfrak{L}_0) = \overline{m}(\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{M}_0) + \overline{m}(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{M}_0)$$

gelten würde, im Widerspruch zu (15).

Zusammenfassend hat sich folgendes ergeben:

Satz 5. Ein vollständiges Maß m hat genau dann die Eigenschaft V, *wenn jede Menge* $\mathfrak{M}$ *aus* Λ_σ *meßbar ist, für welche die Carathéodory'sche Bedingung* (10) *bei beliebigem meßbaren* $\mathfrak{L}$ *endlichen Maßes erfüllt ist.*

Ein Beispiel eines vollständigen Maßes, das die Forderung V erfüllt, ist das in Beispiel 2 angegebene Maß m: für die nicht meßbaren Mengen $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_{1\,2}, \mathfrak{A}_{1\,3}$ ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{2\,3}$ eine meßbare Menge endlichen Maßes, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ nicht meßbar ist. — Da jetzt, wie oben festgestellt, z. B. die nicht meßbare Menge $\mathfrak{A}_{1\,2}$ die Gleichung (8) erfüllt, *braucht die Bedingung* (8) *im Falle* $\overline{m}(\mathfrak{M}) = \infty$ *selbst bei vollständigen Maßen mit der Eigenschaft* V *für die Meßbarkeit von* $\mathfrak{M}$ *nicht hinzureichen.*

Schließlich werde von einem Maße m gesagt, es habe die *Zerlegungseigenschaft*, wenn jede meßbare Menge als Summe abzählbar vieler meßbarer Teile endlichen Maßes dargestellt werden kann. *Trifft dies zu, so erfüllt m die Forderung* V: Man kann ja jede nicht meßbare Menge $\mathfrak{M}$ aus Λ_σ durch eine meßbare Menge $\mathfrak{A}$ überdecken und diese als

[8] Entsprechend dem Satze 9 bei *C. Carathéodory* [4]) S. 267.

Summe abzählbar vieler meßbarer Teile $\mathfrak{A}_\lambda$ endlichen Maßes darstellen. Wegen $\mathfrak{M} = \sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{M}$ ist dann mindestens einer der Summanden $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{M}$ nicht meßbar.

2. Das Lebesgue'sche Maß.

Das Lebesgue'sche Maß des n-dimensionalen Euklid'schen Raumes $\mathfrak{R}_n$ kann auf zwei wesentlich verschiedene Weisen erklärt werden.

a) Es sei (Γ_λ) eine Folge ineinander liegender Gitter des $\mathfrak{R}_n$ mit gegen 0 abnehmender Maschenweite. Jedes der Gitter Γ_λ zerlegt den $\mathfrak{R}_n$ in getrennte, halbabgeschlossene Würfel[9]. Unter einem „Würfelaggregat" $\mathfrak{A}$ der Folge (Γ_λ) werde die Vereinigung von abzählbar vielen getrennten Würfeln $\mathfrak{w}_\mu$ irgend welcher der Gitter Γ_λ verstanden, soferne jede beschränkte Menge von höchstens endlich vielen Würfeln $\mathfrak{w}_\mu$ getroffen wird. Der „elementare Inhalt" $J(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ sei dann die Summe der elementaren Inhalte der einzelnen Würfel $\mathfrak{w}_\mu$; $J(\mathfrak{A})$ ist unabhängig von der Art der für $\mathfrak{A}$ zugelassenen Darstellung. Die Würfelaggregate bilden einen Mengenkörper und die dort erklärte Mengenfunktion $J(\mathfrak{A})$ einen volladditiven Inhalt.

Der Inhalt $J(\mathfrak{A})$ kann nun eindeutig zum kleinsten vollständigen Maße $m(\mathfrak{A})$ mit dem Definitionsbereiche $\varkappa_\sigma$ erweitert werden; dabei hat m die Zerlegungseigenschaft. Die Mengen $\mathfrak{A}$ aus $\varkappa_\sigma$ heißen die nach Lebesgue meßbaren Mengen und $m(\mathfrak{A})$ das Lebesgue'sche Maß von $\mathfrak{A}$. Der Definitionsbereich Λ_σ des zu $m(\mathfrak{A})$ gehörigen äußeren Maßes $\overline{m}(\mathfrak{M})$ besteht aus allen Punktmengen des $\mathfrak{R}_n$. — Insbesondere ist jedes Intervall $\mathfrak{i}$ des $\mathfrak{R}_n$ nach Lebesgue meßbar (und zwar unabhängig von der Zuordnung des Randes) und $m(\mathfrak{i})$ sein elementarer Inhalt $J(\mathfrak{i})$.

Weiters sei $\mathfrak{Q}$ die Summe von irgend welchen abzählbar vielen getrennten Gitterwürfeln $\mathfrak{w}_\mu$. Setzt man dann

$$|\mathfrak{Q}| = \sum_\mu J(\mathfrak{w}_\mu),$$

so ist $|\mathfrak{Q}|$ unabhängig von der für $\mathfrak{Q}$ zugelassenen Darstellung definiert und

$$\overline{m}(\mathfrak{M}) = \inf |\mathfrak{Q}| \text{ für } \mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{M}\ ^{10}. \tag{1}$$

---

[9] Diese haben eine Darstellung der Form $a_\nu \leqq x_\nu < b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

[10] Dieser Aufbau der Lebesgue'schen Maßtheorie ist bei *O. Haupt-G. Aumann* [2]) I. Abschnitt umrissen. — Vgl. auch die allgemeineren Maßtheorien von *E. Tornier*, Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie, Leipzig und Berlin 1936, § 2; Maß- und Inhaltstheorien, in denen die Additivität der Maße nur im Unedlichkleinen gefordert wird, Berliner Sitzber. 1941, Nr. 8.

b) Für jede Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}_n$ werde ein „äußeres Maß" $\mu^*(\mathfrak{M})$ so erklärt: man überdecke $\mathfrak{M}$ irgendwie mit abzählbar vielen offenen n-dimensionalen Intervallen $\mathfrak{i}_\mu$; bedeutet dann $J(\mathfrak{i}_\mu)$ wie bisher den elementaren Inhalt von $\mathfrak{i}_\mu$, so sei

$$\mu^*(\mathfrak{M}) = \inf_{\mu} \Sigma J(\mathfrak{i}_\mu). \tag{2}$$

Eine Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}_n$ heißt nach *Lebesgue* meßbar, wenn für eine beliebige Menge $\mathfrak{L}$ des R_n

$$\mu^*(\mathfrak{L}) = \mu^*(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}) + \mu^*(\mathfrak{L}-\mathfrak{M}) \tag{3}$$

gilt; zugleich ist dann $\mu^*(\mathfrak{M})$ das *Lebesgue*'sche Maß $\mu(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ [11]. — Ich zeige:

Satz 6. Die beiden Erklärungen a) *und* b) *der Meßbarkeit nach Lebesgue und des Lebesgue'schen Maßes sind äquivalent.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ irgend eine Punktmenge des $\mathfrak{R}_n$ und $\{\mathfrak{i}_\mu\}$ ein beliebiges $\mathfrak{M}$ überdeckendes Intervallsystem im Sinne von b). Dann gilt zunächst

$$\overline{m}(\mathfrak{M}) = \inf_{\mu} \Sigma J(\mathfrak{i}_\mu) \tag{4}$$

Um dies zu beweisen, beachte ich, daß die $\mathfrak{i}_\mu$ sowie deren Summe $\mathfrak{S}$ m-meßbar sind und $m(\mathfrak{i}_\mu) = J(\mathfrak{i}_\mu)$ ist. Also gilt stets

$$\overline{m}(\mathfrak{M}) \leqq m(\mathfrak{S}) \leqq \Sigma_{\mu}\, m(\mathfrak{i}_\mu) = \Sigma_{\mu}\, J(\mathfrak{i}_\mu). \tag{5}$$

Hieraus entnimmt man bereits (4) im Falle $\overline{m}(\mathfrak{M}) = \infty$.

Sei nun $\overline{m}(\mathfrak{M})$ endlich. Dann gibt es nach (1) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{M}$ überdeckende Summe $\mathfrak{Q} = \Sigma_{\mu}\, \mathfrak{w}_\mu$ mit

$$|\mathfrak{Q}| < \overline{m}(\mathfrak{M}) + \varepsilon. \tag{6}$$

Ferner kann man zu jedem Würfel $\mathfrak{w}_\mu$ durch „Anfügen" von Würfeln eines jeweils passend feinen Gitters Γ_{λ_μ} ein konzentrisches würfelförmiges Aggregat $\mathfrak{w}'_\mu$ bilden, so daß

$$J(\mathfrak{w}'_\mu) < J(\mathfrak{w}_\mu) + \frac{\epsilon}{2^\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

wird. Die offenen Kerne der Würfel $\mathfrak{w}'_\mu$ bilden dann ein $\mathfrak{M}$ überdeckendes Intervallsystem $\{\mathfrak{i}^*_\mu\}$ im Sinne von b); für dieses ist nach (7) und (6)

[11] Dieser Aufbau ist bei *C. Carathéodory* [4]) Kap. V ausgeführt.

$$\sum_{\mu} J(\mathfrak{i}^*_\mu) = \sum_{\mu} J(\mathfrak{w}'_\mu) < \sum_{\mu} J(\mathfrak{w}_\mu) + \varepsilon = |\mathfrak{Q}| + \varepsilon < \overline{m}(\mathfrak{M}) + 2\varepsilon. \quad (8)$$

Nach (5) und (8) gilt also (4).

Da nun m ein vollständiges Maß ist, das wegen der Zerlegungseigenschaft die Forderung V erfüllt, und, wie eben gezeigt

$$\overline{m}(\mathfrak{M}) = \mu^*(\mathfrak{M}) \quad (9)$$

gilt, sind nach den Sätzen 2 und 4 die m-meßbaren Mengen genau jene Mengen $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}_n$, welche die Bedingung (3) erfüllen. Da hierdurch die μ-meßbaren Mengen gekennzeichnet wurden, fallen diese mit den m-meßbaren zusammen; ferner ist nach (9) $m(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{M})$. — Damit ist unser Satz bewiesen.

Aus ihm folgt unmittelbar, *daß Meßbarkeit und Maß im Falle der Erklärung* a) *von der Wahl der zugrunde gelegten Gitterfolge* (Γ_λ) *nicht abhängen.*

3. Die Maße von Carathéodory.

Unter einem *äußeren Maße im Sinne Carathéodory's* werde eine eindeutige reelle Mengenfunktion $\mu^*(\mathfrak{M}) = \mu^*$ verstanden, welche die folgenden Forderungen erfüllt:

A_1. *Der Definitionsbereich* M_σ *besteht aus allen Teilen einer festen Menge* $\mathfrak{R}$.

A_2. *Es ist* $\mu^* \geqq 0$, *ferner ist* $\mu^*(0) = 0$.[11a]

A_3. *Aus* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \varepsilon M_\sigma)$ *folgt* $\mu^*(\mathfrak{L}) \leqq \mu^*(\mathfrak{M})$.

A_4. *Für je abzählbar viele Mengen* $\mathfrak{M}_\lambda$ *aus* M_σ *mit der Summe* $\mathfrak{S}$ *ist*

$$\mu^*(\mathfrak{S}) \leqq \sum_{\lambda} \mu^*(\mathfrak{M}_\lambda).$$

Eine Menge $\mathfrak{M}$ aus M_σ heiße *meßbar* (*für* μ^*), wenn bei beliebigem $\mathfrak{L}$ aus M_σ, oder wegen A_4 gleichbedeutend, bei beliebigem $\mathfrak{L}$ endlichen äußeren Maßes gilt:

$$\mu^*(\mathfrak{L}) = \mu^*(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}) + \mu^*(\mathfrak{L} - \mathfrak{M}). \quad (1)$$

Das äußere Maß einer meßbaren Menge $\mathfrak{A}$ heiße auch deren *Maß* und werde neben $\mu^*(\mathfrak{A})$ mit $\mu(\mathfrak{A})$ bezeichnet. Sichtlich sind die Mengen 0 und $\mathfrak{R}$ meßbar.

[11a] In [4]) S. 238 wird unter I noch verlangt, daß μ^* einen endlichen Wert $\neq 0$ annehmen soll. Diese Forderung ist aber für den Aufbau der Theorie *Carathéodorys* entbehrlich.

Man stellt sofort fest, daß $\mu(\mathfrak{A}) = \mu$ als Mengenfunktion das Axiom **1** II erfüllt. Ferner ergeben die Sätze VII, X, XVI bei *H. Hahn*[6], S. 426, 428, 429 sofort, daß μ bzw. die Axiome **1** I, III, IV_2 erfüllt. Außerdem enthält der Definitionsbereich von μ $\mathfrak{R}$ als größte Menge[12]. — Dies alles zusammen kann so ausgesprochen werden:

Satz 7. Ein Maß μ im Sinne Carathéodory's ist stets ein vollständiges Maß im Sinne von **1**, *dessen Definitionsbereich eine größte Menge enthält.*

Umgekehrt ist die Außenfunktion $\overline{m}$ irgend eines (nicht notwendig vollständigen) Maßes m, dessen Definitionsbereich eine größte Menge $\mathfrak{R}$ enthält, nach den Sätzen **1** a) bis d) ein äußeres Maß μ^*.

Ein äußeres Maß μ^* heiße ein *gewöhnliches äußeres Maß*, wenn es neben A_1 bis A_4 noch das folgende Axiom erfüllt:

A_5. *Für jede Menge m aus M_σ ist*

$$\mu^*(\mathfrak{M}) = \inf \mu(\mathfrak{A});$$

dabei hat $\mathfrak{A}$ alle für μ^* meßbaren Obermengen von m zu durchlaufen.

Man kann A_5 auch so aussprechen: *μ^* stimmt mit der Außenfunktion $\overline{\mu}$ des für μ^* gebildeten Maßes μ überein* (s. Satz 7).

Für ein gewöhnliches äußeres Maß μ^* auf M_σ gilt nun der in [6]) zitierte Satz: Zu jeder für μ^* nicht meßbaren Menge $\mathfrak{M}$ aus M_σ gibt es eine für μ^* meßbare Menge $\mathfrak{A}$ endlichen Maßes, so daß $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}$ für μ^* nicht meßbar ist[13]. Beachtet man daneben den Satz 7, ferner daß nach A_5 μ^* mit der Außenfunktion $\overline{\mu}$ von μ zusammenfällt, so ergibt sich:

Das zu einem gewöhnlichen äußeren Maße μ^* gehörige Maß μ ist stets ein vollständiges Maß im Sinne von **1**, *dessen Definitionsbereich $\mathfrak{R}$ als größte Menge enthält und das überdies die Forderung* **1** V *erfüllt.*

Es sei nun umgekehrt m ein vollständiges Maß, dessen Definitionsbereich eine größte Menge $\mathfrak{R}$ enthält und das überdies die Forderung **1** V erfüllt. Falls m mit dem zu einem gewöhnlichen äußeren Maße μ^* gehörigen Maß μ übereinstimmt, muß nach A_5 $\overline{m} = \mu^*$ sein. Nun ist aber $\overline{m}$ jedenfalls ein äußeres Maß μ^* im Sinne der Axiome A_1 bis A_4 (s. oben).

---

[12] Daß bei *Carathéodory* für $\mathfrak{R}$ der $\mathfrak{R}_n$ und bei *Hahn* irgend ein metrischer Raum verlangt ist, beeinträchtigt die Gültigkeit der eben genannten Sätze VII, X, XVI im Falle irgend einer Menge $\mathfrak{R}$ nicht.

[13] Daß dieser Satz an der genannten Stelle für „reguläre" äußere Maße bewiesen ist, hat auf seine Gültigkeit unter den vorliegenden Voraussetzungen keinen Einfluß. S. unten.

Weiters müssen die m-meßbaren Mengen mit den für $\overline{m} = \mu^*$ meßbaren Mengen übereinstimmen, nach den Sätzen 2 und 4 sowie der Definition (1) der für μ^* meßbaren Mengen. Da ferner deren Maß m mit dem Maße μ für μ^* zusammenfällt, muß μ^* noch A_5 erfüllen. — Somit gilt:

Ein vollständiges Maß m mit der Eigenschaft **1** V, *dessen Definitionsbereich eine größte Menge $\mathfrak{R}$ enthält, ist stets das zu einem gewöhnlichen äußeren Maße μ^* gehörige Maß μ. Das Maß μ^* ist durch m eindeutig bestimmt und fällt mit $\overline{m}$ zusammen.*

Insgesamt ist also folgendes gezeigt:

Satz 8. Die vollständigen Maße m mit der Eigenschaft **1** V, *deren Definitionsbereich eine größte Menge enthält, und die zu den gewöhnlichen äußeren Maßen μ^* gehörigen Maße μ fallen zusammen.*

Zu einem Maße m der beschriebenen Art gibt es genau ein gewöhnliches äußeres Maß μ^*, für welches m das zugehörige Maß μ ist, nämlich $\overline{m}$.

Ich bemerke noch, daß auch bei den in Satz 8 auftretenden vollständigen Maßen m die Forderung **1** V nicht eine Folge von **1** I bis IV ist, wie wieder das Beispiel 3 in **1** zeigt: der Definitionsbereich von m enthält ja $\mathfrak{A}_{1\,2\,3}$ als größte Menge.

Ein „reguläres" äußeres Maß μ^* entsteht nach *C. Carathéodory*, indem neben A_1 bis A_5 noch die beiden folgenden Forderungen gestellt werden:

A_6. *$\mathfrak{R}$ ist der n-dimensionale Euklid'sche Raum*[14].

A_7. *Für je zwei Mengen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ des Raumes $\mathfrak{R}$ mit positiver Entfernung ist*

$$\mu^*(\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) = \mu^*(\mathfrak{L}) + \mu^*(\mathfrak{M}).$$

Diese beiden Forderungen zusammen mit A_1 bis A_4 bewirken, daß die offenen (und damit die Borel'schen Mengen) meßbar sind, werden aber sonst zum Aufbau der Maßtheorie *Carathéodory's* nicht benötigt.

[14] Bei *H. Hahn* ist $\mathfrak{R}$ irgend ein metrischer Raum [6]) S. 424.

Über die Anwendungen des Vektorkalküls auf die Geometrie algebraischer Kurven.[1]

Von
H. Antosiewicz, Wien.

(Eingelangt am 4. September 1947.)

Im Anschluß an die Untersuchungen von *W. Gröbner*[2] wird im folgenden der bekannte Vektorkalkül durch die Erklärung einer multiplikativen Verknüpfungsoperation derart ausgebaut, daß er mit Vorteil auf die Geometrie algebraischer Kurven angewandt werden kann. Da einer Verallgemeinerung der vorliegenden geometrischen Betrachtungen auf mehrdimensionale Räume und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten keine wesentlichen Hindernisse entgegenstehen, ist zu erwarten, daß sich mit Hilfe des Vektorformalismus in dieser Richtung noch weitreichende neue interessante Ergebnisse erzielen lassen.

I. Algebraischer Vektorkalkül; erweitert symmetrische Funktionen.

Wir gehen bei den folgenden Untersuchungen von einer linearen Vektormannigfaltigkeit M_n der Dimension n aus, die mittels Koeffizienten aus einem Körper K aus den Einheitsvektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}, \mathfrak{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}, \ldots \mathfrak{e}_n = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix}$$

aufgebaut ist. K ist entweder mit dem Körper der komplexen Zahlen identisch oder ein diesen umfassender Körper.

---

[1] Nach einer bei der philosophischen Fakultät der Universität Wien eingereichten Dissertation.

[2] Vgl. *W. Gröbner:* „Algebraische Geometrie auf vektorieller Grundlage", Abh. math. Sem. d. Hansischen Univ., *12* (1938), Seite 354ff.

1. Die algebraische Multiplikation. Wir erklären für die Vektoren aus M_n eine multiplikative Verknüpfungsoperation, die wir die „algebraische Multiplikation" nennen. Wir fordern axiomatisch, daß sie das kommutative und das assoziative Gesetz erfüllt sowie mit der Addition durch das distributive Gesetz verbunden ist.

Seien $\mathfrak{e}_{i_1}, \mathfrak{e}_{i_2}, \ldots \mathfrak{e}_{i_r}$ $(i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_r)$ irgendwelche r $(\lessgtr n)$ Einheitsvektoren aus M_n.

Wir definieren: Für eine beliebige Permutation $i_1', i_2', \ldots i_r'$ der $i_1, i_2, \ldots i_r$ ist das algebraische Produkt $\mathfrak{e}_{i_1} \mathfrak{e}_{i_2} \ldots \mathfrak{e}_{i_r}$ der nicht in M_n liegende Einheitsvektor „r-ter Stufe" $\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$:

$$\mathfrak{e}_{i'_1} \mathfrak{e}_{i'_2} \ldots \mathfrak{e}_{i'_r} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \qquad (i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_r). \tag{1}$$

Da jeder Vektor aus M_n einer Linearform der Einheitsvektoren mit Koeffizienten aus K gleichkommt, ergibt sich für die algebraische Multiplikation von beliebigen Vektoren aus M_n: Das algebraische Produkt von r $(\lessgtr n)$ beliebigen Vektoren aus M_n ist ein nicht in M_n enthaltener Vektor „r-ter Stufe", der gebildet wird, indem man die r-Linearformen der Einheitsvektoren in der gewöhnlichen Weise miteinander multipliziert und die einzelnen Summanden zuletzt nach den Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ $(i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_r)$ lexikographisch anordnet[3].

Das algebraische Produkt der Vektoren $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{b} = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathfrak{e}_k$ aus M_n ist demnach der Vektor zweiter Stufe

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{e}_i \sum_{k=1}^{n} b_k \mathfrak{e}_k = \frac{1}{2} \sum_{i \leqq k} (2 - \delta_{ik})(a_i b_k + a_k b_i) \mathfrak{e}_{ik}.$$

Die Rechenregeln für die algebraische Multiplikation sind somit ohne weiteres klar. Nullteiler können nicht auftreten.

Wir setzen für die Vektoren gleicher Stufe in derselben Weise wie für die Vektoren aus M_n die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar aus K fest. Verschiedenstufige Vektoren können *nicht* addiert werden. Hingegen erklären wir für sie algebraische Produkte.

---

[3] Diese algebraischen Produkte stimmen im wesentlichen mit den von *W. Gröbner* ebenfalls algebraisch genannten und von *R. König* und *E. Peschl* als kommutativ bezeichneten Produkten überein. Vgl. hiezu *R. König* und *E. Peschl:* „Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum", Ber. Verh. Sächs. Ak. d. W., Bd. *13* (1934), S. 268ff.

Fordern wir wieder axiomatisch die Erhaltung des kommutativen, des assoziativen und des distributiven Gesetzes, so ist zufolge (1) das algebraische Produkt der Einheitsvektoren $e_{i_1 i_2 \dots i_r}$, $e_{k_1 k_2 \dots k_s}$ der r-ten, bzw. s-ten Stufe der Einheitsvektor $e_{j_1 j_2 \dots j_{r+s}}$ der Stufe $r+s$, dessen Indizes die ihrer Größe nach geordneten Zahlen $i_1, i_2, \dots i_r, k_1, k_2, \dots k_s$ sind:

$$e_{i_1 i_2 \dots i_r} e_{k_1 k_2 \dots k_s} = e_{k_1 k_2 \dots k_s} e_{i_1 i_2 \dots i_r} = e_{j_1 j_2 \dots j_{r+s}} \quad (j_1 \leqq j_2 \leqq \dots \leqq j_{r+s}). \tag{2}$$

Das algebraische Produkt eines Vektors $\mathfrak{x}$ der r-ten Stufe mit einem Vektor $\mathfrak{y}$ der s-ten Stufe ist also ein Vektor der Stufe $r+s$. Man erhält ihn, wenn man die beiden Linearformen in den Einheitsvektoren der r-ten, bzw. s-ten Stufe miteinander multipliziert und die einzelnen Summanden nach den Einheitsvektoren der Stufe $r+s$ schließlich lexikographisch anordnet.

Z. B. ist das algebraische Produkt eines Vektors $\mathfrak{x}$ zweiter Stufe mit einem Vektor $\mathfrak{y}$ („erster Stufe") aus M_n der Vektor dritter Stufe

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = \sum_{i \leqq k} x_{ik}\, e_{ik} \sum y_l\, e_l = \sum_{i \leqq k \leqq l} z_{ikl}\, e_{ikl}$$

$$\text{mit } z_{ikl} = \begin{cases} x_{ii}\, y_i & \text{für } i = k = l \\ x_{ii}\, y_l + x_{il}\, y_i & \text{für } i = k,\ i \neq l \\ x_{ik}\, y_k + x_{kk}\, y_i & \text{für } i \neq k,\ k = l \\ x_{ik}\, y_l + x_{il}\, y_k + x_{kl}\, y_i & \text{für } i \neq k,\ i \neq l,\ k \neq l. \end{cases}$$

Für das Rechnen mit solchen Produkten bestehen die üblichen Gesetze.

Die Vektoren r-ter Stufe können wie die Vektoren aus M_n als Spaltenvektoren geschrieben werden; man braucht hiefür einfach die Koeffizienten der nach den Einheitsvektoren r-ter Stufe lexikographisch geordneten Linearform untereinander in Evidenz zu setzen.

Sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{y}$ r-ter Stufe stetige Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen λ, so definieren wir in vollkommener Analogie zu den skalaren Funktionen den Grenzwert

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\,\mathfrak{y}}{\Delta\,\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\mathfrak{y}\,(\lambda + \Delta\lambda) - \mathfrak{y}\,(\lambda)}{\Delta\,\lambda} \tag{3}$$

als Differentialquotienten $\dfrac{d\,\mathfrak{y}}{d\,\lambda}$ und nennen diesen Vektor $\mathfrak{y}' = \dfrac{d\,\mathfrak{y}}{d\,\lambda} =$

$\lim \frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta \lambda}$ die Ableitung des Vektors $\mathfrak{y}$ nach λ . $\mathfrak{y}'$ ist also der Vektor, dessen Komponenten sämtlich die Ableitungen derjenigen von $\mathfrak{y}$ sind. In gleicher Weise erklären wir die höheren Ableitungen von $\mathfrak{y}$, so z. B.:

$$\mathfrak{y}'' = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\lambda}\right) = \frac{d\mathfrak{y}'}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\mathfrak{y}'(\lambda + \Delta\lambda) - \mathfrak{y}'(\lambda)}{\Delta\lambda} \tag{4}$$

Die Rechenregeln für die Differentiation von Summen und algebraischen Vektorprodukten entsprechen danach denjenigen für skalare stetige Funktionen einer Veränderlichen.

2. Vektorgleichungen; erweitert symmetrische Funktionen. Die algebraische Multiplikation ermöglicht es, im erweiterten Vektorbereich algebraische Vektorgleichungen beliebigen Grades aufzustellen.

Wir bilden zunächst mit den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ aus M_n und einem Vektor $\mathfrak{x}$, dessen Komponenten Unbestimmte sind, das Differenzenprodukt

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_2)\ldots(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_m). \tag{5}$$

Entwickeln wir es nach Potenzen von $\mathfrak{x}$, so erhalten wir das Vektorpolynom m-ten Grades

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m \mathfrak{s}_m, \tag{6}$$

dessen Koeffizienten $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ in der gewöhnlichen Weise die elementarsymmetrischen Funktionen der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \ldots + \mathfrak{x}_m \\ \mathfrak{s}_2 &= \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + \ldots + \mathfrak{x}_{m-1}\mathfrak{x}_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{s}_m &= \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\ldots\mathfrak{x}_m. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir nennen sie deshalb die „*elementarsymmetrischen Vektoren*" von $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$.

Das Vektorpolynom (6) gleich Null gesetzt, ergibt eine Vektorgleichung m-ten Grades, welche die m-Wurzeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ und nur diese besitzt.

Betrachten wir nun die elementarsymmetrischen Vektoren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ näher! Ihre Komponenten sind sämtlich ganze rationale Ausdrücke in den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$, die ungeändert bleiben, wenn man in ihnen alle Komponenten zweier Vektoren gleichzeitig miteinander vertauscht. Sie sind also in dem Körper S jener rationalen Funktionen der Komponenten $x_{\mu\nu}$ von m-Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{vmatrix}, \quad \ldots \mathfrak{x}_m = \begin{vmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mn} \end{vmatrix}$$

enthalten, die gegenüber beliebigen Vertauschungen der Vektoren untereinander, d. h. gegenüber Permutationen aller ersten Indizes, invariant sind. Solche rationale Funktionen nennen wir *„erweitert symmetrisch"*. Die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ sollen im besonderen die *„erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen"* heißen[4].

Will man eine Vektorgleichung m-ten Grades

$$\mathfrak{x}_m - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m \mathfrak{a}_m = 0 \tag{8}$$

aufstellen, deren Koeffizienten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ Vektoren der bzw. ersten, zweiten, ... m-ten Stufe sein müssen[5], so hat man die Komponenten dieser Vektoren also derart zu bestimmen, daß sie die erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen von mn Elementen aus K oder einem algebraischen Erweiterungskörper K^* von K sind. Dann und nur dann ist die Vektorgleichung (8) vollständig reduzibel, d. h. in das Produkt von m-Linearfaktoren

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2) \ldots (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_m) = 0$$

zerfällbar, und ihre Wurzeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ liegen in M_n über K^*. Andernfalls müßte zur Auflösung der Gleichung eine algebraische Erweiterung des Vektorbereiches vorgenommen werden, der wir keine geometrische Bedeutung beimessen können.

Bei der Bestimmung der $\binom{m+n}{m} - 1$ Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ hat man zu beachten, daß diese Komponenten mn algebraisch unabhängige enthalten, während die übrigen von diesen algebraisch abhängen. Erteilt man den ersten willkürliche Werte, so müssen daher die Werte der restlichen durch Auflösung von algebraischen Gleichungen ermittelt werden. Dies ist in der Regel äußerst unbequem.

---

[4] In ihnen sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Variablen $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots x_{m\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots n$) enthalten.

[5] Wäre dies nämlich nicht der Fall, so hätte die Vektorgleichung (8) überhaupt keinen Sinn, da verschiedenstufige Vektoren nicht addiert werden können.

Existiert hingegen für den Körper S der rationalen erweitert symmetrischen Funktionen der Variablen $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots m$; $\nu = 1, 2, \ldots n$) eine Minimalbasis bestehend aus mn Funktionen $s_{\mu\nu}$, in denen sich jede weitere Funktion aus S rational darstellen läßt, so kann man den Basisfunktionen willkürliche Werte zuweisen und aus diesen die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ rational, d. h. ohne algebraische Gleichungen auflösen zu müssen, berechnen.

Wir behaupten: *Die folgenden elementarsymmetrischen Funktionen*

$$\begin{aligned} s_{11} &= x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \\ s_{21} &= x_{11}\, x_{21} + \ldots + x_{m-1,\,1}\, x_{m\,1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m1} &= x_{11}\, x_{21} \ldots x_{m1} \end{aligned} \tag{9}$$

bilden gemeinsam mit den m(n-1) erweitert symmetrischen Funktionen

$$\begin{aligned} s_{1k} &= x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{mk} \\ s_{2k} &= x_{11}\, x_{1k} + x_{21}\, x_{2k} + \ldots + x_{m1}\, x_{mk} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (k = 2, 3, \ldots n) \\ s_{mk} &= x_{11}^{m-1}\, x_{1k} + x_{21}^{m-1}\, x_{2k} + \ldots + x_{m1}^{m-1}\, x_{mk} \end{aligned} \tag{10}$$

eine Minimalbasis des Körpers S, d. h. jede rationale erweitert symmetrische Funktion $R\,(\ldots x_{\mu\nu} \ldots)$ *der* $x_{\mu\nu}$ *ist eindeutig als rationale Funktion* $\overline{R}\,(\ldots s_{\mu\nu} \ldots)$ *der* $s_{\mu\nu}$ *darstellbar.*

Beweis: Die Auflösung der Gleichungen (10) nach $x_{\mu k}$ für ein bestimmtes k ergibt:

$$x_{\mu k} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots s_{1k} & \ldots 1 \\ x_{11} & \ldots s_{2k} & \ldots x_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{11}^{m-1} & \ldots s_{mk} & \ldots x_{m1}^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_{11} & \ldots\ldots & x_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{11}^{m-1} & \ldots\ldots & x_{m1}^{m-1} \end{vmatrix}} \qquad \begin{matrix} (\mu = 1, 2, \ldots m) \\ (k = 2, 3, \ldots n) \end{matrix} \tag{11}$$

und wenn mit der im Nenner stehenden Determinante erweitert wird:

$$x_{\mu k} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \ldots s_{1k} & \ldots 1 \\ x_{11} & \ldots s_{2k} & \ldots x_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{11}^{m-1} & \ldots s_{mk} & \ldots x_{m1}^{m-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & \ldots & x_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{11}^{m-1} & \ldots & x_{m1}^{m-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Δ ist die Diskriminante einer Gleichung m-ten Grades mit den Koeffizienten $-s_{11}, +s_{21}, \ldots \pm s_{m1}$, also ein Polynom in den $s_{11}, s_{21}, \ldots s_{m1}$. Entwickelt man für jedes μ und jedes k den Zähler in (12) nach $x_{\mu 1}$, so werden die Koeffizienten der einzelnen Potenzen ganze rationale Funktionen der $s_{1k}, s_{2k}, \ldots s_{mk}$ und der $x_{11}, \ldots x_{\mu-1,\,1}, x_{\mu+1,\,1}, \ldots x_{m1}$ sein, die in den letzteren symmetrisch sind und daher als ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung

$$\begin{aligned}(x-x_{11})(x-x_{21})\ldots(x-x_{m1}):(x-x_{\mu 1}) &= \\ = (x^m - s_{11}x^{m-1} + \ldots \pm s_{m1}):(x-x_{\mu 1}) &= \\ x^{m-1} - (s_{11}-x_{\mu 1})\,x^{m-2} + (s_{21}-s_{11}x_{\mu 1} + x_{\mu 1}^2)\,x^{m-3} - \ldots & \\ \pm (s_{m-1,\,1} - s_{m-2,\,1}\,x_{\mu 1} + \ldots \pm x_{\mu 1}^{m-1}) = 0 & \qquad (13)\end{aligned}$$

dargestellt werden können. Durch weiteres Ausmultiplizieren und Reduzieren mit Hilfe der Identität:

$$x_{\mu 1}^m - s_{11}x_{\mu 1}^{m-1} + \ldots + (-1)^m s_{m1} \equiv 0 \qquad (14)$$

wird schließlich der Zähler in (12) ein Polynom in $x_{\mu 1}$ vom Grade m-1 mit ganzen rationalen Funktionen der $s_{\mu\nu}$ als Koeffizienten. Die Gleichungen (12) lassen sich damit in die Form bringen:

$$x_{\mu k} = A_0^{(k)} x_{\mu 1}^{m-1} + A_1^{(k)} x_{\mu_1}^{m-2} + \ldots + A_{m-1}^{(k)}, \qquad (15)$$

wobei die $A_l^{(k)}$ rationale Funktionen der $s_{\mu\nu}$ sind. Setzt man diese Ausdrücke für die Variablen $x_{\mu k}$ in eine beliebige rationale erweitert symmetrische Funktion $R(..x_{\mu\nu}..)$ der $x_{\mu\nu}$ ein, so geht diese in eine rationale Funktion der $s_{\mu\nu}$ und der $x_{11}, x_{21}, \ldots x_{m1}$ über, die in den $x_{11}, x_{21}, \ldots x_{m1}$ symmetrisch ist. Diese kann nach dem Hauptsatz über die symmetrischen Funktionen in eine rationale Funktion $\overline{R}(..s_{\mu\nu}..)$ der $s_{\mu\nu}$ umgeformt werden.

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung folgt aus der algebraischen Unabhängigkeit der Funktionen $s_{\mu\nu}$.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen sind im besonderen rationale Funktionen der $s_{\mu\nu}$.

Beispiel: In der Ebene lautet die Vektorgleichung zweiten Grades:

$$\mathfrak{x}^2 - a_1\mathfrak{x} + a_2 = \mathfrak{x}^2 - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\mathfrak{x} + \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Damit sie vollständig reduzibel ist, muß ihre Diskriminante das Quadrat

eines Vektors $\mathfrak{d}$ (erster Stufe) aus M_n (eventuell über einem algebraischen Erweiterungskörper K^* von K) sein:

$$\mathfrak{d}^2 = \mathfrak{a}_1^2 - 4\,\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2.^6 \tag{17}$$

Daraus folgt, daß die Komponenten der Koeffizientenvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ die eine Gleichung

$$a_1^2\,a_{22} - a_1\,a_2\,a_{12} + a_2^2\,a_{11} + a_{12}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22} = 0 \tag{18}$$

identisch erfüllen müssen. Aus ihr ist zu ersehen, daß es zur Bestimmung der Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ nicht gleichgültig ist, welche von ihren Komponenten beliebig vorgegeben werden. Nimmt man

$$\begin{aligned} s_{11} &= x_1 + x_2 \qquad & s_{12} &= y_1 \quad + y_2 \\ s_{21} &= x_1\,x_2 & s_{22} &= x_1\,y_1 + x_2\,y_2 \end{aligned} \tag{19}$$

willkürlich an, so ist $a_1 = s_{11}$, $a_2 = s_{12}$, $a_{11} = s_{21}$ und für a_{12} und a_{22} ergibt sich in eindeutiger Weise

$$a_{12} = x_1\,y_2 + x_2\,y_1 = s_{11}\,s_{12} - s_{22};\; a_{22} = y_1\,y_2 = \frac{s_{11}\,s_{12}\,s_{22} - s_{22}^2 - s_{12}^2\,s_{21}}{s_{11}^2 - 4\,s_{21}} \tag{20}$$

3. Hauptsatz über die erweitert symmetrischen Funktionen. Mit Hilfe des algebraischen Vektorkalküls kann ein Satz über ganze rationale symmetrische Funktionen von beliebig vielen Gruppen mehrerer Variablen, der zuerst von *F. Mertens* aufgestellt und bewiesen wurde[7], derart formuliert werden, daß er als Analogon zu dem bekannten Hauptsatz über die symmetrischen Funktionen erscheint. Wir nennen ihn deshalb den „Hauptsatz über die erweitert symmetrischen Funktionen".

Aus der vorigen Nummer wissen wir, daß die Komponenten der elementarsymmetrischen Vektoren $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, ... $\mathfrak{s}_m$ ganze rationale erweitert symmetrische Funktionen von $m \,.\, n$ Variablen $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots m$; $\nu = 1, 2, \ldots n$) sind. Also kann der Körper S^* jener Funktionen höchstens gleich dem Körper S aller rationalen erweitert symmetrischen Funktionen der $x_{\mu\nu}$ sein: $S^* \subseteq S$. Durch den *Mertens*'schen Satz erfahren wir nun, daß sich jede Funktion aus S in den Funktionen aus S^* darstellen läßt, d. h. $S \subseteq S^*$ ist. Mithin müssen die beiden Körper einander gleich sein.

---

[6] Man kann daher (16) auch in der Form $\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x} + \frac{1}{4}(\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{d}^2) = 0$ schreiben.

[7] Vgl. *F. Mertens:* „Zur Theorie der symmetrischen Funktionen", Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. Ak. d. W. in Wien, Bd. *81* (1880).

Die erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen bilden keine *Minimal*basis des Körpers S. Da sie voneinander nicht algebraisch unabhängig sind, ist die Darstellung einer Funktion aus S in den erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen nicht eindeutig. Es läßt sich jedoch jede *ganze* Funktion aus S als *ganze* Funktion der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen darstellen.

Im Gegensatz hierzu kann jede Funktion aus S *eindeutig* in eine rationale Funktion der $s_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots m$; $\nu = 1, 2, \ldots n$) unserer Minimalbasis von S umgeformt werden. Allerdings geht eine ganze rationale erweitert symmetrische Funktion im allgemeinen in eine gebrochene rationale Funktion der $s_{\mu\nu}$ über.

Mit unseren Bezeichnungen lautet der

Satz von Mertens: Jeder ganze erweitert symmetrische Ausdruck A in den Komponenten der m Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{vmatrix}, \quad \ldots \mathfrak{x}_m = \begin{vmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mn} \end{vmatrix}$$

ist stets als ganze rationale Funktion der Komponenten der elementarsymmetrischen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_m \\ \mathfrak{s}_2 &= \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{m-1} \mathfrak{x}_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{s}_m &= \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_m \end{aligned}$$

darstellbar.

Für $n = 1$ ist der Satz offenbar richtig, denn in diesem Falle ist er identisch mit dem Hauptsatz über die symmetrischen Funktionen. Nimmt man an, daß er auch für beliebige n richtig sei, dann ist für $m = 1$ nichts zu beweisen. Wir führen daher den Beweis durch Induktion nach m unter der Voraussetzung, daß der Satz für m—1 Vektoren besteht.

Entwickelt man A nach $x_{m1}, x_{m2}, \ldots x_{mn}$, so sind die Koeffizienten der einzelnen Potenzprodukte $x_{m1}^{i_1} x_{m2}^{i_2} \ldots x_{mn}^{i_n}$ erweitert symmetrische Ausdrücke in den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_{m-1}$, die sich nach unserer Induktionsvoraussetzung durch die

erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen der Komponenten jener Vektoren darstellen lassen. Man sieht jedoch, wenn man dem Vektorpolynom

$$\mathfrak{x}^m + \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + \mathfrak{s}_m \tag{21}$$

den Linearfaktor $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_m$ abspaltet, daß diese erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen ganze rationale Funktionen der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ und des Vektors $\mathfrak{x}_m$ sind; denn es ist

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}^m + \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + \mathfrak{s}_m = \\ &= [\mathfrak{x}^{m-1} + (\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{x}_m)\mathfrak{x}^{m-2} + \ldots + (\mathfrak{s}_{m-1} - \ldots \pm \mathfrak{x}_m^{m-1})](\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_m). \end{aligned} \tag{22}$$

Daher läßt sich A in die Form

$$A = \sum_{i_1 \ldots i_n} G_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{m1}^{i_1} x_{m2}^{i_2} \ldots x_{mn}^{i_n} \tag{23}$$

bringen; die $G_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sind ganze rationale Funktionen der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen aller Variablen..

Denkt man sich nun A in der gleichen Weise nach den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_{m-1}$ entwickelt und beachtet, daß A erweitert symmetrisch in sämtlichen Variablen ist, so kann man zugleich mit (23) die folgenden Identitäten insgesamt anschreiben:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma G_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{11}^{i_1} x_{12}^{i_2} \ldots x_{1n}^{i_n} \\ A &= \Sigma G_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{21}^{i_1} x_{22}^{i_2} \ldots x_{2n}^{i_n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A &= \Sigma G_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{m1}^{i_1} x_{m2}^{i_2} \ldots x_{mn}^{i_n} \end{aligned} \tag{24}$$

Setzt man zur Abkürzung $\sum_{\mu=1}^{m} x_{\mu 1}^{i_1} x_{\mu 2}^{i_2} \ldots x_{\mu n}^{i_n} = H_{i_1 \ldots i_n}$, so folgt aus ihnen durch Addition:

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i_1 \ldots i_n} G_{i_1 i_2 \ldots i_n} H_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{25}$$

Der Vektor k-ter Stufe $\mathfrak{x}_1^k + \mathfrak{x}_2^k + \ldots + \mathfrak{x}_m^k$ enthält für $k = \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu$ eine Komponente, die gleich $H_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist. Stellt man ihn als Polynom in $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ dar, indem man den Hauptsatz über die symmetrischen

Funktionen auf die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ anwendet, so erhält man durch Vergleich der einander entsprechenden Komponenten $H_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ als ganze rationale Funktion der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen. Damit ist der Satz bewiesen.

Insbesondere sind die Funktionen $s_{\mu\nu}$ unserer Minimalbasis von S ganze rationale Funktionen der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen der Variablen $x_{\mu\nu}$.

4. Verallgemeinerung des Hauptsatzes. Der Hauptsatz über die erweitert symmetrischen Funktionen läßt sich in der folgenden Weise verallgemeinern:

Satz: *Jedes erweitert symmetrische Differential*

$$S_1(..x_{\mu\nu}..)\, dx_{1i_1}\ldots dx_{1i_r} + S_2(..x_{\mu\nu}..)\, dx_{2i_1}\ldots dx_{2i_r} + \ldots + S_m(..x_{\mu\nu}..)\, dx_{mi_1}\ldots dx_{mi_r} \tag{26}$$

einer rationalen Funktion der Komponenten der Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{vmatrix}, \quad \ldots \mathfrak{x}_m = \begin{vmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mn} \end{vmatrix}$$

in dem die $i_1, i_2, \ldots i_r$ eine beliebige Kombination ohne Wiederholung der Zahlen 1, 2, ...n sind, ist als rationales Differential der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen dieser Variablen darstellbar.

Beweis: Bei Vertauschung von $\mathfrak{x}_k$ mit $\mathfrak{x}_l$ geht in (26) S_k in S_l und dementsprechend $dx_{ki_1} \ldots dx_{ki_r}$ in $dx_{li_1} \ldots dx_{li_r}$ über, während alle anderen Ausdrücke ungeändert bleiben. Daher ist S_k erweitert symmetrisch in bezug auf die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_{k-1}, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots \mathfrak{x}_m$. Entwickelt man also Zähler und Nenner von S_k nach $x_{k1}, x_{k2}, \ldots x_{kn}$, so werden die Koeffizienten der einzelnen Potenzprodukte erweitert symmetrische Polynome in den übrigen Variablen sein, die zufolge (22) als ganze rationale Funktionen der $x_{k1}, x_{k2}, \ldots x_{kn}$ und der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen sämtlicher Variablen dargestellt werden können. Die $S_\mu(..x_{\mu\nu}..)$ haben somit die Form:

$$S_\mu(..x_{\mu\nu}..) = \sum_{j_1 \ldots j_n} R_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_{\mu 1}^{j_1} x_{\mu 2}^{j_2} \ldots x_{\mu n}^{j_n} \quad (\mu = 1, 2, \ldots m), \tag{27}$$

wobei die $R_{j_1 j_2 \dots j_n}$ rationale Funktionen der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen der $m \,.\, n$ Variablen $x_{\mu\nu}$ sind. Es ist demnach bloß zu beweisen, daß jeder Differentialausdruck

$$\sum_{\mu=1}^{m} x_{\mu 1}^{j_1} x_{\mu 2}^{j_2} \dots x_{\mu n}^{j_n} dx_{\mu i_1} dx_{\mu i_2} \dots dx_{\mu i_r} \tag{28}$$

ein rationales Differential der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen ist.

Nach dem Hauptsatz über die erweitert symmetrischen Funktionen kann jede Summe $\sum_{\mu=1}^{m} x_{\mu\nu}^{\alpha+1}$ $(\alpha \geqq 0)$ als ganzer rationaler Ausdruck in den erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen geschrieben werden. Daraus folgt unmittelbar, daß jeder Differentialausdruck $\sum_{\mu=1}^{m} x_{\mu\nu}^{a} dx_{\mu\nu}$ ein rationales Differential der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen ist. Es lassen sich daher für die $dx_{\mu i_\varrho}$ die r-Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
dx_{1i_\varrho} \quad &+ \quad dx_{2i_\varrho} \quad + \dots + \quad dx_{mi_\varrho} = dR_{1i_\varrho} \\
x_{1i_\varrho} dx_{1i_\varrho} \quad &+ x_{2i_\varrho} dx_{2i_\varrho} \quad + \dots + x_{mi_\varrho} dx_{mi_\varrho} = dR_{2i_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots r) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{1i_\varrho}^{m-1} dx_{1i_\varrho} &+ x_{2i_\varrho}^{m-1} dx_{2i_\varrho} + \dots + x_{mi_\varrho}^{m-1} dx_{mi_\varrho} = dR_{mi_\varrho}
\end{aligned} \tag{29}$$

aufstellen, deren rechte Seiten rationale Differentiale der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen sind. Unter Berücksichtigung der üblichen Rechenregeln können aus ihnen — durch ähnliche Rechnungen wie wir sie unter 2. angeführt haben — die Differentiale $dx_{\mu i_\varrho}$ in der Gestalt

$$dx_{\mu i_\varrho} = A_1^{(i_\varrho)} dR_{1i_\varrho} + A_2^{(i_\varrho)} dR_{2i_\varrho} + \dots + A_m^{(i_\varrho)} dR_{mi_\varrho} \tag{30}$$

bestimmt werden, wobei die $A_\mu^{(i_\varrho)}$ rationale Funktionen der Variablen $x_{\mu i_\varrho}$ und der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen sämtlicher Variablen $x_{\mu\nu}$ sind. Diese Ausdrücke in (28) eingesetzt, ergeben eine Summe von Potenzprodukten aus allen Variablen, die in einzelne erweitert symmetrische Teilsummen, bestehend aus m Summanden, mit rationalen Differentialen der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen als Koeffizienten zerfällt. Diese Teilsummen sind nach dem Hauptsatz ganze rationale Funktionen der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen, und daher geht (28) in ein rationales Differential der erweiterten elementarsymmetrischen Funktionen über, w. z. b. w.

II. Darstellung linearer Punktscharen auf ebenen algebraischen Kurven durch Vektorgleichungen.

In dem erweiterten Vektorbereich kann den vollständig reduziblen algebraischen Vektorgleichungen die gleiche geometrische Bedeutung wie den skalaren algebraischen Gleichungen beigemessen werden. Wir beschränken uns im folgenden auf die Untersuchung von Vektorgleichungen ebener algebraischer Kurven[8].

5. Die Vektorgleichung einer ebenen algebraischen Kurve. Sei

$$f(x, y) = 0 \tag{31}$$

die Gleichung einer ebenen irreduziblen algebraischen Kurve f, auf der durch das Büschel B

$$\varphi(x, y) + \lambda \psi(x, y) = 0 \tag{32}$$

eine eindimensionale lineare Schar g^1_m definiert ist. Sind unter den Schnittpunkten einer im Büschel B veränderlichen Kurve mit der Kurve f einige feste Punkte vorhanden, so können diese zu den Punktgruppen der Schar gezählt oder weggelassen werden.

Die Punktgruppen der g^1_m bilden eine rationale Mannigfaltigkeit, da sie birational auf die Werte des Parameters λ bezogen sind. Ein allgemeiner Punkt P der Kurve f ist in einer einzigen Punktgruppe der g^1_m enthalten.

Eliminiert man y aus den Gleichungen (31) und (32) mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, so ergibt sich bei allgemeiner Lage des Koordinatensystems unter anderen eine in y lineare Gleichung

$$y\, a(x, \lambda) + b(x, \lambda) = 0 \tag{33}$$

und — eventuell nach Abspaltung eines von λ unabhängigen Faktors, der den festen Punkten der Schar entspricht — eine Gleichung

$$x^m + r_1(\lambda)\, x^{m-1} + \ldots + r_m(\lambda) = 0, \tag{34}$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen von λ sind. Diese Gleichung liefert für einen bestimmten Wert $\lambda = \lambda_0$ die Abzissen der Schnittpunkte von f mit der Kurve des Büschels B, die dem Parameterwert $\lambda = \lambda_0$ entspricht.

---

[8] Der Vorteil des Vektorkalküls tritt allerdings erst in Räumen höherer Dimension hervor; denn während man zur Darstellung von algebraischen Mannigfaltigkeiten in Räumen höherer Dimension, also z. B. einer algebraischen Raumkurve, gewöhnlich mehrere algebraische Gleichungen benötigt, genügt zu demselben Zweck immer eine einzige Vektorgleichung.

Deutet man die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_m$ einer auf f veränderlichen Gruppe der g_m^1 als Punktvektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ (indem man die Koordinaten jedes Punktes als Komponenten eines Vektors ansetzt), so kann man aus der Gleichung (34) und den aus (33) folgenden Gleichungen

$$y_\mu = -\frac{b(x_\mu, \lambda)}{a(x_\mu, \lambda)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m) \tag{35}$$

die elementarsymmetrischen Vektoren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_m$ dieser Punktvektoren berechnen. Ihre Komponenten werden sämtlich rationale Funktionen von λ sein. Die Vektorgleichung

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{s}_1(\lambda)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m \mathfrak{s}_m(\lambda) = 0 \tag{36}$$

ist dann offenbar vollständig reduzibel und hat gerade die m Wurzeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$. Durchläuft λ den gesamten Wertevorrat einer komplexen Veränderlichen, so werden diese m Punkte genau einmal die Kurve f beschreiben. Die Vektorgleichung (36) ist also der Gleichung (31) vollkommen gleichwertig, wir können sie daher ebenso wie (31) als Definitionsgleichung der Kurve f ansehen. Deren Ordnung ist allerdings aus ihr nicht mehr unmittelbar abzulesen; dem kommt aber keine wesentliche Bedeutung zu, da die Ordnung keine birationale Invariante der Kurve ist.

Wenn auf einer ebenen irreduziblen algebraischen Kurve $F(x, y) = 0$ eine lineare Schar g_m^r gegeben ist, die durch das lineare Kurvensystem $\varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_r \varphi_r = 0$ ausgeschnitten wird, dann läßt sich in ähnlicher Weise die Vektorgleichung der Kurve F herleiten. Man wird eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{s}_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m \mathfrak{s}_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r) = 0 \tag{37}$$

erhalten, deren Koeffizientenvektoren von r Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ abhängig sind, und die daher für jedes r-Tupel $(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_r)$ m Wurzeln besitzt, welche die Punkte der diesen Parameterwerten entsprechenden Gruppe der g_m^r sind. Auch die Vektorgleichung (37) kann ebenso wie $F(x, y) = 0$ als Gleichung der Kurve angesehen werden.

6. Die Vektorgleichung der ebenen algebraischen Kurve dritter Ordnung. Wir wollen als Beispiel die Vektorgleichung der ebenen algebraischen Kurve dritter Ordnung aufstellen.

Wir gehen aus von der elliptischen Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht $p = 1$

$$y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta) \qquad 0 < \alpha < \beta \tag{38}$$

und definieren auf ihr eine g_2^1, die durch das Geradenbüschel

$$y = \lambda x \tag{39}$$

ausgeschnitten werden möge. Den allen Punktgruppen der Schar gemeinsamen Koordinatenanfangspunkt lassen wir bei unseren Untersuchungen beiseite.

Durch Elimination von y aus den Gleichungen (38) und (39) erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - (\lambda^2 + \alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0, \tag{40}$$

die für einen speziellen Wert $\lambda = \lambda_0$ die Abzissen der Schnittpunkte der Geraden $y = \lambda_0 x$ mit der Kurve (38) liefert.

Sind $\mathfrak{x}_1 = \binom{x_1}{y_1}$, $\mathfrak{x}_2 = \binom{x_2}{y_2}$ die beiden Punkte einer allgemeinen Gruppe der g_2^1, so können aus (39) und (40) ihre elementarsymmetrischen Vektoren berechnet werden. Es ist

$$\mathfrak{s}_1 = \binom{x_1+x_2}{y_1+y_2} = (\lambda^2+\alpha+\beta)\binom{1}{\lambda}, \quad \mathfrak{s}_2 = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ x_1\, y_2 + x_2\, y_1 \\ y_1\, y_2 \end{pmatrix} = \alpha\beta\binom{1}{\lambda}^2. \tag{41}$$

Die Vektorgleichung

$$\mathfrak{x}^2 - (\lambda^2 + \alpha + \beta)\binom{1}{\lambda}\mathfrak{x} + \alpha\beta\binom{1}{\lambda}^2 = 0 \tag{42}$$

bestimmt daher ebenso wie (38) unsere Ausgangskurve, wenn λ den gesamten Wertevorrat einer komplexen Variablen durchläuft. Lösen wir sie in der gewöhnlichen Weise auf, so bekommen wir

$$\mathfrak{x}_{1,\,2} = \frac{\lambda^2 + \alpha + \beta \pm \sqrt{\lambda^4 + 2\lambda^2(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)^2}}{2}\binom{1}{\lambda} \tag{43}$$

und können die Kurve punktweise berechnen.

Lassen wir nun die beiden Schnittpunkte $A\ (\alpha, 0)$, $B\ (\beta, 0)$ der Kurve (38) mit der Abzissenachse in den Punkt $D\ (\gamma, 0)$ zusammenrücken, so geht unsere ursprüngliche Kurve über in die rationale Kurve dritter Ordnung

$$y^2 = x\,(x-\gamma)^2 \qquad (p = 0), \tag{44}$$

die in $D\ (\gamma, 0)$ einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten besitzt. Ihre Vektorgleichung ergibt sich aus (42), wenn wir darin $\alpha = \beta = \gamma$ setzen:

$$\mathfrak{x}^2 - (\lambda^2 + 2\gamma)\binom{1}{\lambda}\mathfrak{x} + \gamma^2\binom{1}{\lambda}^2 = 0. \tag{45}$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist der Vektor

$$\mathfrak{d}^2 = \lambda^2 (\lambda^2 + 4\gamma) \binom{1}{\lambda}^2, \tag{46}$$

der für $\lambda = 0$ der Nullvektor ist. Also besitzt für $\lambda = 0$ die Vektorgleichung eine Doppelwurzel, und diese ist tatsächlich $\mathfrak{x} = \gamma \binom{1}{0}$, der Doppelpunkt D der Kurve. Wir sehen aber, daß auch noch andere Werte λ vorhanden sind, für die der Vektor $\mathfrak{d}^2$ in den Nullvektor übergeht. Ist λ' ein solcher, so kann offenbar nur dann die Vektorgleichung (45) für λ' eine Doppelwurzel haben, wenn die Gerade $y = \lambda' x$ des Büschels (39) eine Tangente an die Kurve wird. Ein Punkt der Kurve, für den dies eintritt, heißt ein „Doppelpunkt der Schar g_2^1". Die Gruppe der Doppelpunkte nennt man die „*Jacobi*'sche Gruppe" der Schar g_2^1.

Die Vektorgleichung

$$\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x} + \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x} + \frac{1}{4}(\mathfrak{s}_1^2 - \mathfrak{d}^3) = 0 \tag{47}$$

kann nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung differenziert werden. Durch Differentiation nach λ ergibt sich die Gleichung

$$2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}' - \mathfrak{s}'_1\,\mathfrak{x} - \mathfrak{s}_1\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{s}'_2 = 0 \tag{48}$$

aus der unmittelbar folgt:

$$\mathfrak{x}' = \frac{\mathfrak{s}'_1\,\mathfrak{x} - \mathfrak{s}'_2}{2\,\mathfrak{x} - \mathfrak{s}_1}.^{9} \tag{49}$$

Faßt man diese Gleichung als *Tschirnhaus*-Transformation der Gleichung (47) auf und eliminiert aus ihr und (47) in der gewöhnlichen Weise den variablen Vektor $\mathfrak{x}$, so bekommt man die Gleichung

$$\mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{s}'_1\,\mathfrak{x}' + \frac{\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{s}'^2_1 - \mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{s}'_1 + \mathfrak{s}'^2_2}{4\,\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1^2} = 0. \tag{50}$$

Ersetzt man in ihr $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}'_2$ durch die entsprechenden Ausdrücke in $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}'_1$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, so nimmt sie nach kurzer Zwischenrechnung die Form

$$\mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{s}'_1\,\mathfrak{x}' + \frac{1}{4}(\mathfrak{s}'^2_1 - \mathfrak{d}'^2) = 0 \tag{51}$$

---

[9] Wenn wir hier $\mathfrak{x}'$ als Quotienten zweier Vektoren anschreiben, obwohl wir für Vektoren gleicher wie verschiedener Stufen keine Division erklärt haben, so geschieht dies aus formalen Gründen. Wir verstehen unter $\mathfrak{x}'$ den Vektor, der mit dem Vektor $2\,\mathfrak{x} - \mathfrak{s}_1$ algebraisch multipliziert, gleich dem Vektor $\mathfrak{s}'_1\,\mathfrak{x} - \mathfrak{s}'_2$ ist.

an. Man sieht, daß diese Gleichung genau wie (47) gebaut ist; vom algebraischen Standpunkt ist sie auch der Gleichung (47) vollkommen gleichwertig, denn sie kann bekanntlich durch eine ähnliche *Tschirnhaus*-Transformation in diese zurücktransformiert werden.

Durch mehrmalige Differentiation ergibt sich in analoger Weise

$$\mathfrak{x}^{(k)^2} - \mathfrak{s}_1^{(k)}\,\mathfrak{x}^{(k)} + \frac{1}{4}\,(\mathfrak{s}_1^{(k)^2} - \mathfrak{d}^{(k)^2}) = 0. \tag{52}$$

7. Das Abelsche Theorem. Es ist eine ebene algebraische Kurve C durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{a}_1(\lambda)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m\,\mathfrak{a}_m(\lambda) = 0 \tag{53}$$

gegeben. Die Komponenten der Koeffizientenvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ sind sämtlich rationale Funktionen der unabhängigen Variablen λ, die gewissen algebraischen Bedingungen genügen, sodaß die Vektorgleichung vollständig reduzibel ist.

Sind die Punkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ der Kurve C eine allgemeine Lösung der Vektorgleichung (53), gehören sie also ein und derselben Gruppe einer linearen Schar g_m^1 auf der Kurve an, so nennen wir sie m „konjugierte" Kurvenpunkte.

Wir betrachten eine ganze rationale erweitert symmetrische Funktion der Koordinaten von m konjugierten Punkten der Kurve C. Nach dem Hauptsatz über die erweitert symmetrischen Funktionen ist diese als Polynom in den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ darstellbar. Da diese Komponenten rationale Funktionen der Variablen λ sind, so folgt:

Jede ganze rationale erweitert symmetrische Funktion der Koordinaten von m konjugierten Punkten der Kurve C ist eine rationale Funktion von λ.

Im besonderen sind daher die $2m$ Funktionen $s_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots m$; $\nu = 1, 2$) unserer Minimalbasis des Körpers S der rationalen erweitert symmetrischen Funktionen, in denen sich jede Funktion aus S in eindeutiger Weise rational darstellen läßt, rationale Funktionen von λ.

Es gilt allgemein der

Satz: Jede rationale erweitert symmetrische Funktion der Koordinaten von m konjugierten Punkten der ebenen algebraischen Kurve

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{a}_1(\lambda)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m\,\mathfrak{a}_m(\lambda) = 0$$

ist eine rationale Funktion von λ.

Aus dem unter 4. ausgesprochenen Satz ergibt sich danach sofort der

Satz: Jedes erweitert symmetrische Differential

$$S_1(..x_{\mu\nu}..)\,dx_{1i_1}\,dx_{1i_2} + S_2(..x_{\mu\nu}..)\,dx_{2i_1}\,dx_{2i_2} + \ldots + S_m(..x_{\mu\nu}..)\,dx_{mi_1}\,dx_{mi_2} \qquad (i_1 = {}^1_2,\ i_2 = {}^2_1)$$

einer rationalen Funktion der Koordinaten von m konjugierten Punkten der ebenen algebraischen Kurve

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{a}_1(\lambda)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m\,\mathfrak{a}_m(\lambda) = 0$$

ist ein rationales Differential von λ.

Dieser Satz ist von weittragender Bedeutung, denn aus ihm folgt unmittelbar das berühmte *Abel*sche Theorem[10]. Nach unserem Satz ist nämlich im besonderen jeder Differentialausdruck

$$R(x_{11}, x_{12})\,dx_{11} + R(x_{21}, x_{22})\,dx_{21} + \ldots + R(x_{m1}, x_{m2})\,dx_{m1} \qquad (54)$$

ein rationales Differential von λ, wenn $R(x_{\mu 1}, x_{\mu 2})$ eine beliebige rationale Funktion der Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}_\mu$ der m konjugierten Kurvenpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_m$ ist. Daraus ergibt sich durch Integration das

Abelsche Theorem: Ist $R(x_{\mu 1}, x_{\mu 2})$ irgendeine rationale Funktion der Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{x}_\mu$ der ebenen algebraischen Kurve

$$\mathfrak{x}^m - \mathfrak{a}_1(\lambda)\,\mathfrak{x}^{m-1} + \ldots + (-1)^m\,\mathfrak{a}_m(\lambda) = 0$$

und sind $\bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2, \ldots \bar{\mathfrak{x}}_m$ die Wurzeln dieser Vektorgleichung, wenn in ihr $\lambda = \bar{\lambda}$ gesetzt wird, so ist

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}_1}^{\mathfrak{x}_1} R(x_{11}, x_{12})\,dx_{11} + \int_{\bar{\mathfrak{x}}_2}^{\mathfrak{x}_2} R(x_{21}, x_{22})\,dx_{21} + \ldots + \int_{\bar{\mathfrak{x}}_m}^{\mathfrak{x}_m} R(x_{m1}, x_{m2})\,dx_{m1} = \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} R'(\lambda)\,d\lambda$$

mit einer rationalen Funktion $R'(\lambda)$.

Wir sind damit durch den algebraischen Vektorkalkül fast ohne Schwierigkeiten zu einem der fundamentalsten Sätze der Geometrie auf einer algebraischen Kurve gekommen.

[10] Vgl. *N. H. Abel:* Oeuvres complètes I., S. 145 und S. 515.

Eine asymptotische Formel für Potenzsummen komplexer Linearformen.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 29. September 1947.)

Es seien $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$ zwei komplexe Linearformen, deren Koeffizienten eine Matrix A mit $|\text{Det. } A| = 1$ bilden. Es werde nun die Potenzsumme

$$Z(x, y) = |L_1(x, y)|^a + |L_2(x, y)|^a$$

gebildet. Dabei sei $a > 0$. Wir lassen nun x, y alle ganzen Zahlen aus k (i)[1] durchlaufen, dabei bleibe (0, 0) ausgeschlossen, und betrachten

$$M(A, a) = \operatorname*{Min}_{(x, y) \neq (0, 0)} Z(x, y).$$

Wir untersuchen nun

$$M(a) = \sup_A M(A, a).$$

Es gilt dann folgende Abschätzung für $M(a)$, wenn $0 < a < 1$, wie gezeigt werden soll (Satz 2):

$$[M(a)]^{\frac{1}{a}} = \frac{2^{\frac{1}{a}}}{\sqrt[4]{3}} (1 + a\, g(a)) \qquad (0 < a < 1);$$

Dabei liegt $g(a)$ zwischen positiven Schranken:

$$0 < C_1 \leqq g(a) \leqq C_2$$

Eine solche Entwicklung wurde zuerst von *K. Mahler*[2] im Rahmen seiner weitgreifenden Theorie der Strahlkörper für reelle Linearformen aufgestellt, nur ist dann $\sqrt[4]{3}$ durch $\sqrt[4]{5}$ zu ersetzen. Beim Beweis verwenden wir folgenden Satz (Satz 1):

---

[1] k Körper der rationalen Zahlen.

[2] *K. Mahler*, On lattice points in the domain $|xy| \leqq 1$, $|x + y| \leqq \sqrt{5}$ and applications to asymptotie formulae in lattice point theory (II). Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. 40, S. 116.

Es gibt stets ganze Zahlen $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$, so daß

$$|L_1 L_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{Max}(|L_1|, |L_2|) \leqq c$$

ist, wo für $c = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ genommen werden kann.

Man könnte auch, *K. Mahler* folgend, den Strahlkörper: $|L_1 L_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|L_1 + L_2| \leqq c$ zum Beweis heranziehen. Satz 1 folgt leicht aus einem Satz von *Perron*[3] über *Cassini*'sche Kurven.

Hilfssatz 1 *(Perron*[3]*)*: Es seien g und z_1 komplexe Zahlen. Dann gibt es stets eine komplexe Zahl z, so daß $z - z_1$ eine ganze Zahl aus $k(i)$ und

$$|z^2 - g| \leqq \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{3}|g|^2} \tag{1}$$

ist. Man kann dabei noch z so wählen, daß $|z| \leqq \frac{\sqrt{5}}{2}$ ist.[4]

Satz 1: Es seien $L_1(x, y) = ax + by$, $L_2(x, y) = cx + dy$ zwei komplexe Linearformen mit $ad - bc = 1$. Dann gibt es ganze Zahlen $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$, so daß

$$|L_1 L_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{Max}(|L_1|, |L_2|) \leqq \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \tag{2}$$

ist.

Beweis: Es gibt stets ganze Zahlen $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$, wobei wir noch annehmen können, daß sie zueinander relativ-prim sind, so daß

$$|L_1(x, y)|^2 + |L_2(x, y)|^2 \leqq \sqrt{2}$$

ist[5]. Dann ist, wenn wir $L_1 L_2 = P$ setzen,

$$2|P| = 2|L_1 L_2| \leqq |L_1|^2 + |L_2|^2 \leqq \sqrt{2}$$

also

$$|P(x, y)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

Weiter ist

$$E(x, y) = \text{Max}(|L_1|, |L_2|) \leqq \sqrt[4]{2} \tag{4}$$

---

[3] *O. Perron*, Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\mathfrak{k}(i)$. Math. Annalen 103, S. 535—541.

[4] Die letzte Behauptung findet sich in [3]) nicht explizit, kann aber den dortigen Entwicklungen entnommen werden.

[5] *Perron*, Math. Zeitschrift, Bd. 36, S. 148.

Ist jetzt $|P(x,y)|$ sogar $\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der Satz bewiesen, denn es ist $E \leqq \sqrt[4]{2} < c = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Wir können also annehmen, daß

$$|P(x,y)| > \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

ist. Weiter kann o. B. d. A. $y \neq 0$ angenommen werden. Wir gehen nun so vor (vgl. *Perron*[2]): Da x und y relativ-prim sind, gibt es unendlich viele ganze Zahlen $(x_1, y_1) \neq (0,0)$, so daß

$$x_1 y - x y_1 = 1 \tag{6}$$

ist. Wir bilden nun $L_1^* = L_1(x_1, y_1)$, $L_2^* = L_2(x_1, y_1)$, P^*, E^*. Dann ist

$$L_1^* = L_1\left(z + \frac{1}{2P}\right),\ L_2^* = L_2\left(z - \frac{1}{2P}\right), \tag{7}$$

wo

$$z = \frac{y_1}{y} + \frac{c L_1 + a L_2}{2 y P} \tag{8}$$

ist. Wir wollen nur die erste Relation (7) herleiten:

$$L_1^* = L_1 \frac{y_1}{y} + \frac{a}{y} = L_1\left(z - \frac{c L_1 + a L_2}{2 y P}\right) + \frac{a}{y} = L_1 z + \frac{a L_2 - c L_1}{2 y L_2} =$$

$$= L_1 z + \frac{1}{2 y L_2}, \text{ da } a L_2 - c L_1 = a d - b c = 1 \text{ ist.}$$

Daraus folgt

$$P_1^* = P\left(z^2 - \frac{1}{4P^2}\right),\ E^* \leqq E\left(|z| + \frac{1}{2|P|}\right) \tag{8'}$$

Die erste Bezeichnung (8′) ist grundlegend für die Überlegungen bei Perron[3].

Es ist nach (6) y_1 nur modulo y bestimmt. Nach Hilfssatz 1 kann nun y_1 so gewählt werden, daß $|z| \leqq \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\left| z^2 - \frac{1}{4P^2} \right| \leqq$

$\leqq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12|P|^4}}$ ist. Es ist also

$$|P_1|^2 \leqq \frac{1}{4}\left(|P|^2 + \frac{1}{3|P|^2}\right).$$

Da nun $\frac{1}{3} < |P|^2 \leqq \frac{1}{2}$, so ist $|P|^2 + \frac{1}{3|P|^2}$ als Funktion in $|P|^2$ monoton abnehmend im Interwall $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, also

$$|P_1|^2 \leqq \frac{1}{4}(\frac{1}{3} + 1) = \frac{1}{3}.$$

Weiter ist

$$E^* \leqq E(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkung: Es wäre wichtig, das kleinste c zu bestimmen, für welches der Satz noch zutrifft.

Hilfssatz 2: Es sei

$$F_1 = x + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\, y, \; F_2 = x + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, y.$$

Dann ist für alle ganzen $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$

$$|F_1 F_2| \geqq 1 \tag{9}$$

und

$$\text{Max}\,(|F_1|, \frac{1}{\sqrt[4]{12}}|F_2|) \geqq 1 \tag{9'}$$

Beweis: Es ist $F_1 F_2 = x^2 + xy + y^2$ eine ganze Zahl aus $k(i)$, wenn x und y aus $k(i)$ sind. Weiter ist, wenn außerdem noch $(x, y) \neq (0, 0)$, $F_1 F_2 \neq 0$, denn sonst würde $i\sqrt{3}$ in $k(i)$ liegen, was nicht zutrifft. Also ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$ $|F_1 F_2| \geqq 1$. Wir müssen jetzt noch (9') beweisen. Ist für ein vorgegebenes Paar $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$ $|F_1| \geqq 1$, so ist (9') richtig. Wir können also annehmen, daß es mindestens ein solches Zahlenpaar gibt, so daß $|F_1| < 1$ ist. Dann muß aber $x\bar{y} - y\bar{x} \neq 0$ sein.

Es ist nämlich:

$$|F_1|^2 = |x + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\, y|^2 = |x|^2 + \frac{1}{2}(y\bar{x} + x\bar{y}) + |y|^2 - \frac{i\sqrt{3}}{2}(x\bar{y} - y\bar{x})$$

und dieser Ausdruck ist $\geqq 1$, wenn $x\bar{y} - y\bar{x} = 0$ ist.

Nun ist

$$F_2 = x + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, y = F_1 - i\sqrt{3}\, y$$

also

$$|F_2|^2 = |F_1|^2 + i\sqrt{3}\,(\bar{y}\,x - y\,\bar{x})$$

Es ist, wie wir wissen, $i\,(\bar{y}\,x - y\,\bar{x}) \neq 0$ und da es eine reelle, gerade Zahl ist, so muß $|\,i\,(\bar{y}\,x - y\,\bar{x})\,| \geqq 2$ sein. Es ist aber sicher $i\,(\bar{y}\,x - y\,\bar{x}) > 0$, denn wäre es < 0, so wäre es sogar $\leqq -2$, also $|F_2|^2 \leqq |F_1|^2 - 2\sqrt{3} < 1 - 2\sqrt{3} < 0$, was unmöglich ist.

Also ist $|F_2|^2 \geqq 2\sqrt{3} = \sqrt[4]{12}$ w. z. h. w.

Satz 2: Es seien zwei komplexe Linearformen L_1, L_2 gegeben. Für die zugehörige Matrix A sei $|\,\text{Det. } A\,| = 1$. Es sei

$$M(A, \alpha) = \operatorname*{Min}_{(x,\,y) \neq (0,\,0)} (|L_1|^\alpha + |L_2|^\alpha) \quad (x, y \text{ aus } k(i)),$$

wo $\alpha > 0$ und

$$M(\alpha) = \sup_A M(A, \alpha) \quad (|\,\text{Det. } A\,| = 1).$$

Dann gilt für $0 < \alpha < 1$

$$[M(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt[4]{3}}\,(1 + \alpha\, g(\alpha)), \tag{10}$$

wo

$$C_1 \leqq g(\alpha) \leqq C_2$$

ist. Man kann $C_1 = \frac{1}{32}\,ln^2\,2\sqrt{3}$, $C_2 = \frac{1}{8}\,e^{(n-1)^2}$ nehmen, wo $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(4\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$ ist.

Beweis: Wir zeigen zuerst $g(\alpha) \geqq \frac{1}{32}\,ln^2\,2\sqrt{3}$.

Wir betrachten die zwei speziellen Linearformen

$$L_1 = \sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,(x + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\,y); \quad |L_2| = \sqrt[4]{\frac{1}{6\sqrt{3}}}\,(x + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\,y),$$

deren Determinante $-i$ ist. Wir setzen $L_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,F_3$, $L_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,F_4$, $F_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\,F_1$, $F_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{3}}}\,F_2$, wo F_1 und F_2 die Linearformen von Hilfssatz 2 sind. Es ist nach diesem Hilfssatz $|\,F_3\,F_4\,| = |\,F_1\,F_2\,| \geqq 1$, $\operatorname{Max}(|F_3|, |F_4|) \geqq \sqrt[4]{2\sqrt{3}}$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$. Es ist nun

$$\left(\frac{1}{2}\left(|L_1|^a+|L_2|^a\right)\right)^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{|F_3|^a+|F_4|^a}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\geqq\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{|F_3|^a+|F_3|^{-a}}{2}\right)^{\frac{1}{a}},$$

da $|F_3 F_4|\geqq 1$. *O. B. d. A.* sei $|F_3|\geqq|F_4|$. Dann ist nach obigem $|F_3|\geqq\sqrt[4]{2\sqrt{3}}>1$ für $(x, y)\neq(0, 0)$ aus $k(i)$. Nun ist aber[6] $\frac{1}{2}(x^a+x^{-a})=1+\frac{1}{2}(x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}})^2$ und für $x\geqq 1$ $f(x)=x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}-\alpha\ ln\ x$ stets $\geqq 0$, da $f(x)$ monoton zunehmend ist. Daraus folgt $\frac{1}{2}(x^a+x^{-a})\geqq 1+\frac{1}{2}\alpha^2 ln^2 x$, also

$$\left(\frac{x^a+x^{-a}}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\geqq\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\ ln^2 x\right)^{\frac{1}{a}}\geqq 1+\frac{\alpha}{2}\ ln^2 x$$

für $\alpha<1$. Setzen wir $x=|F_3|$, so folgt

$$\left(\frac{|L_1|^a+|L_2|^a}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\geqq\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(1+\frac{\alpha}{2}\ ln^2|F_3|\right)\geqq\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(1+\frac{\alpha}{2}ln^2\sqrt[4]{2\sqrt{3}}\right)$$

für alle $(x, y)\neq(0, 0)$ aus $k(i)$, also ist auch

$$[M(\alpha)]^{\frac{1}{a}}\geqq\frac{2^{\frac{1}{a}}}{\sqrt[4]{3}}\left(1+\frac{a}{32}\ ln^2 2\sqrt{3}\right),$$

d. h.

$$g(\alpha)\geqq\frac{1}{32}\ ln^2 2\sqrt{3}\qquad\text{w. z. h. w.}$$

Wir wenden uns jetzt zum zweiten Teil unserer Behauptung. Zunächst sei folgendes vorweggeschickt: Ist $x\geqq 1$ und $0<\alpha<1$, so ist $\frac{1}{2}(x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}})=1+\frac{1}{2x^{\frac{a}{2}}}(x^{\frac{a}{2}}-1)^2$. Nun ist

$$x^{\frac{a}{2}}-1=\left(1+(x-1)\right)^{\frac{a}{2}}-1\leqq\frac{\alpha}{2}(x-1)$$

also

$$\left(\frac{x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\leqq\left(1+\frac{\alpha^2}{8x^{\frac{a}{2}}}(x-1)^2\right)^{\frac{1}{a}}\leqq\left(1+\frac{a^2}{8}(x-1)^2\right)^{\frac{1}{a}}\leqq e^{\frac{a}{8}(x-1)^2},$$

[6] Es sei jetzt x irgend eine positive reelle Zahl.

da $1+\frac{\alpha^2}{8}(x-1)^2 \leqq e^{\frac{\alpha^2}{8}(x-1)^2}$. Der letzte Ausdruck ist nun $\leqq 1+\frac{\alpha}{8}$ $e^{(x-1)^2}$, also erhalten wir, alles zusammengefaßt,

$$\frac{(x^{\frac{\alpha}{2}}+x^{-\frac{\alpha}{2}})^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \leqq 1+\frac{\alpha}{8}e^{(x-1)^2} \tag{11}$$

Es seien nun L_1 und L_2 zwei beliebige Linearformen mit $|\text{Det. } A|=1$. Nach Satz 1 gibt es nun Zahlen $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $k(i)$, so daß

$$|L_1 L_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ Max } (|L_1|, |L_2|) \leqq c = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}). \tag{12}$$

O. B. d. A. sei $|L_1| \geqq |L_2|$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $|L_2| \leqq \frac{1}{n}c$, wo $n=\sqrt{3}\,c^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})$ ist.

Dann ist

$$\frac{(|L_1|^\alpha+|L_2|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \leqq c\frac{(1+n^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{2} = \frac{c}{\sqrt{n}}\frac{(n^{\frac{\alpha}{2}}+n^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \leqq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

$$(1+\frac{\alpha}{8}e^{(n-1)^2})c = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\frac{\alpha}{8}c^{(n-1)^2})$$

nach (11) mit $x=n>1$, also

$$\frac{(|L_1|^\alpha+|L_2|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{3}}(1+\frac{\alpha}{8}c^{(n-1)^2}) \tag{13}$$

2, $|L_2| > \frac{1}{n}c$. Dann ist

$$\frac{(|L_1|^\alpha+|L_2|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2} = \sqrt{|L_1 L_2|}\,\frac{1}{2}\left(\left|\frac{L_1}{L_2}\right|^{\frac{\alpha}{2}}+\left|\frac{L_1}{L_2}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq$$

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}(1+\frac{\alpha}{8}c^{(n-1)^2})$ nach (12) und (11) mit $1 \leqq x = \left|\frac{L_1}{L_2}\right| < n$;

wir erhalten also wieder (13), d. h.

$$[M(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt[4]{3}}(1+\frac{\alpha}{8}c^{(n-1)^2})$$

w. z. b. w.

Zur Geometrie der Reihen.

Von
K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 1. Oktober 1947.)

H. Hornich hat folgenden interessanten Satz bewiesen:[1] Sei a_n beliebig komplex und so beschaffen, daß $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\Sigma |a_n|$ divergent ist. Ist ζ eine primitive k-*te* Einheitswurzel, $k \geqq 3$, so können ganze rationale Zahlen l_j so bestimmt werden, daß die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^{l_j}$$

zu jedem beliebigen Wert A der komplexen Zahlenebene konvergent wird.

Man hat also die Möglichkeit, jedes Glied a_j um einen der Winkel $0, \frac{2\pi}{k}, 2\frac{2\pi}{k} \ldots (k-1)\frac{2\pi}{k}$ zu drehen und kann dadurch die Konvergenz erreichen. Einfache Beispiele lassen vermuten, daß es möglich ist, den l_j noch weitere einschränkende Bedingungen aufzuerlegen.

Betrachten wir zum Beispiel die harmonische Reihe. Sie erfüllt offenbar die Bedingungen des *Hornich*'schen Satzes. Wir nehmen etwa $k = 3$. Sei P ein beliebiger Punkt der oberen Halbebene. Dann können wir die Reihe auf folgende Weise mit Potenzen von $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ so multiplizieren, daß sie gegen P konvergent wird: Sei Q_1 der Punkt der reellen Achse, für den $arg\ (P-Q_1) = \frac{2\pi}{3}$. Dann bestimmen wir auf der reellen Achse den ersten Punkt P_1, der rechts von Q_1 liegt und einer Partialsumme der harmonischen Reihe entspricht: $P_1 = s_{k_1}$. Die Reihenglieder mit dem Index $> k_1$ multiplizieren wir mit $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Es wird dann einen ersten Index $k_2 > k_1$ geben, für den die so abgeänderten Partialsummen die Halbgerade $arg\ (P-z) = \frac{4\pi}{3}$ überschreiten:

---

[1] Monatshefte f. Math. 45, S. 432.

$$arg\,(P-(s_{k_1}+(s_{k_2}-s_{k_1})\,e^{i\frac{2\pi}{3}}) \geqq \frac{4\pi}{3}$$

Die Glieder mit dem Index $> k_2$ multiplizieren wir mit $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ und zwar solange, bis die so geänderten Teilsummen die Halbgerade $arg\,(P-z) = 0$ überschreiten. Dann multiplizieren wir mit $\zeta^3 = 1$ und so fahren wir fort.

Man sieht, daß hier bei jedem Schritt die Alternative besteht, entweder in einer Richtung fortzuschreiten oder um $\frac{2\pi}{3}$ zu drehen. Allgemein beweisen wir folgenden

Satz: Sei a_n beliebig komplex und so beschaffen, daß $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\Sigma a_n = \infty$ ist. (Darunter verstehen wir, daß die Teilsummen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ gegen den Punkt ∞ der komplexen Zahlenebene streben sollen.) ζ sei eine primitive *k-te* Einzelwurzel, $k \geqq 3$. Dann kann man zu jedem Punkt A der komplexen Zahlenebene ganze rationale Zahlen l_j finden, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\text{(B)} \qquad l_{j+1} \text{ entweder} = l_j \text{ oder} = l_j + 1$$
$$\Sigma\, a_j\, \zeta^{l_j} = A.$$

Beweis: Wir wählen ein $0 < \delta < \pi\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{k})$ und bestimmen den kleinsten Index $n_1 \geqq k$ so, daß gilt

$$|\,a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n_1}\,| \geqq \frac{|\,a_1\,| + |\,a_2\,| + \ldots + |\,a_{k-1}\,|}{\sin\delta} \qquad (1)$$

Wegen der Voraussetzung über Σa_n gibt es einen solchen. Dann, behaupte ich, kann man die Glieder der Partialsumme s_{n_1} so auf eine der Bedingung (B) genügende Art mit k-ten-Einheitswurzeln multiplizieren, daß für die geänderte Teilsumme s'_{n_1} gilt

$$|\,arg\,\frac{A}{s'_{n_1}}\,| \leqq \frac{\pi}{k} + \delta. \qquad (2)$$

In der Tat kann man zunächst m_1 $(0 \leqq m_1 < k)$ so finden, daß

$$|\,arg\,\frac{A}{\zeta^{m_1}(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n_1})}\,| \leqq \frac{\pi}{k}$$

wird. Wenn $m_1 = 0$ ist, so setze man $s'_{n_1} = s_{n_1}$, wenn $m_1 > 0$ ist

$$s'_{n_1} = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{m_1-1}\zeta^{m_1-1} + \zeta^{m_1}(a_{m_1} + a_{m_1+1} + \ldots + a_{n_1})$$

Diese Multiplikation genügt der Forderung (B). Es ist hier nämlich $l_1 = 1, l_2 = 2, \ldots l_{m_1} = m_1, l_{m_1+1} = \ldots = l_{n_1} = m_1$. Man kann also s_{n_1} so abändern, daß die geänderte Teilsumme s'_{n_1} in einem Sektor

S_1 um den Nullpunkt von der Größe $2\,(\frac{\pi}{k}+\delta)$ liegt, welcher zu A symmetrisch ist.

Nun bestimmen wir den kleinsten Index $n_2 \geqq n_1 + k$ so, daß analog zu (1) die Ungleichung gilt

$$|\, a_{n_1+k} + \ldots + a_{n_2} \,| \geqq \frac{|\, a_{n_1+1} \,| + \ldots + |\, a_{n_1+k-1} \,|}{\sin \delta}. \qquad (1')$$

Dann kann man ebenso wie vorhin die Glieder des Abschnittes

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}$$

so mit Potenzen von ζ multiplizieren, daß für den geänderten Abschnitt b'_2

$$|\, arg \frac{A}{b'_2} \,| \leqq \frac{\pi}{k} + \delta \qquad (2')$$

wird und daß außerdem mit dem schon bestimmten $l_1, \ldots l_{n_1}$ die Bedingung (B) erfüllt ist. In der Tat wählen wir erstens m_2 mit $0 \leqq m_2 < k$ so, daß

$$|\, arg \frac{A}{\zeta^{m_2}(a_{n_1+k} + \ldots + a_{n_2})} \,| \leqq \frac{\pi}{k}.$$

Wenn $m_2 = m_1$, so setzen wir $b'_2 = b_2 \zeta^{m_1}$. Wenn $m_2 \neq m_1$, so sei $m_1 + r_2$ die kleinste der Zahlen $m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots m_1 + k - 1$, welche $\equiv m_2\,(k)$ ist. Wir setzen dann

$$b'_2 = a_{n_1+1}\zeta^{m_1+1} + a_{n_1+2}\zeta^{m_1+2} + \ldots + a_{n_1+r_2-1}\zeta^{m_1+r_2-1} + \zeta^{m_1+r_2}(a_{n_1+r_2} + \ldots + a_{n_2}) = a_{n_1+1}\zeta^{m_1+1} + a_{n_1+2}\zeta^{m_1+2} + \ldots + a_{n_1+r_2-1}\zeta^{m_2-1} + \zeta^{m_2}(a_{n_1+r_2} + \ldots + a_{n_2}).$$

Dieser Abschnitt genügt (B) und (2'). Es liegt also auch b'_2 im Sektor S_1 und daher natürlich auch

$$s'_{n_2} = s'_{n_1} + b'_2$$

Nun verläuft der Beweis weiterhin genau analog wie in der *Hornich*'schen Arbeit. D_1 sei das Deltoid mit den Ecken O, A, $A\cos(\frac{\pi}{k}+\delta)\,e^{\pm i(\frac{\pi}{k}+\delta)}$.

Wir ändern nun weitere Abschnitte

$$b_3 = a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3} = s_{n_3} - s_{n_2} \qquad n_3 > n_2 + k$$

$$b_4 = a_{n_3+1} + \ldots + a_{n_4} = s_{n_4} - s_{n_3} \qquad n_4 > n_3 + k \text{ usw.}$$

so ab, daß die abgeänderten Abschnitte b'_3, b'_4, ... die Ungleichungen erfüllen

$$\left| arg \frac{A}{b'_3} \right|, \left| arg \frac{A}{b'_4} \right|, \ldots \leqq \frac{\pi}{k} + \delta. \tag{2''}$$

Und zwar soll n_j immer der kleinste Index $\geqq n_{j-1} + k$ sein, für den gilt

$$\left| a_{n_{j-1}+k} + \ldots + a_{n_j} \right| \geqq \frac{\left| a_{n_{j-1}+1} \right| + \ldots + \left| a_{n_{j-1}+k-1} \right|}{\sin \delta} \tag{1''}$$

Es liegen nun auch die Teilsummen $s'_{n_3} = s'_{n_1} + b'_2 + b'_3$, $s'_{n_4} = s'_{n_3} + b'_4$, usw. in dem Sektor S_1. Wie gleich nachher gezeigt wird, wächst auch $\Sigma \left| b'_j \right|$ über alle Grenzen und es gibt also einen kleinsten Index k_1, für den $s'_{n_{k_1}} = s'_{n_1} + \sum_{j=2}^{k_1} b'_j$ außerhalb von D_1 liegt. D_2 sei nun das Deltoid mit den Ecken $O, 'A - s'_{n_{k_1}}, (A - s_{n_{k_1}}) \cos(\frac{\pi}{k} + \delta)\, e^{\pm i(\frac{\pi}{k} + \delta)}$.

Wir ändern Abschnitte $b_{k_1}, b_{k_1+1}, \ldots$ so ab, daß die geänderten Abschnitte $b'_{k_1}, b'_{k_1+1}, \ldots$ in D_2 liegen. Sei $k_2 > k_1$ der kleinste Index für den

$$b'_{k_1} + b'_{k_1+1} + \ldots + b'_{k_2} = s_{n_{k_2}} - s'_{n_{k_1}}$$

außerhalb D_2 fällt. Dann setzen wir das Verfahren im Deltoid D_3 mit den Ecken $O, A - s'_{n_{k_2}}, (A - s'_{n_{k_2}}) \cos(\frac{\pi}{k} + \delta)\, e^{\pm i(\frac{\pi}{k} + \delta)}$ fort.

Wir zeigen nun zunächst $b'_j \to 0$, $\Sigma \left| b'_j \right| = \infty$. Es ist nämlich, da n_j der kleinste Index $> n_{j-1} + k$ sein sollte, für den (1'') gilt,

$$\left| a_{n_{j-1}+k} + \ldots + a_{n_j - 1} \right| < \frac{\left| a_{n_{j-1}+1} \right| + \ldots + \left| a_{n_{j-1}+k-1} \right|}{\sin \delta}$$

und also

$$\left| b'_j \right| < \left(\left| a_{n_{j-1}+1} \right| + \ldots + \left| a_{n_{j-1}+k-1} \right| \right) \left(1 + \frac{1}{\sin \delta}\right) + \left| a_{n_j} \right|$$

Rechts stehen $(k-1)+1$ Glieder, die mit $j \to \infty$ gegen 0 streben, also $b'_j \to 0$.

Zweitens gilt (ebenfalls wegen (1''))

$$\left| b'_j \right| \geqq \left| a_{n_{j-1}+k} + \ldots + a_{n_j} \right| (1 - \sin \delta)$$

und außerdem

$$\left| a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j} \right| \leqq \left| a_{n_{j-1}+k} + \ldots + a_{n_j} \right| (1 + \sin \delta) \left|\right.$$

also

$$\left| b'_j \right| \geqq \left| a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j} \right| \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}.$$

Wegen $\Sigma a_n = \infty$ ist also auch $\Sigma \mid b_j' \mid = \infty$.

Wir setzen zur Abkürzung $s'_{n_{k_j}} = \sigma_j$ und $\sin\left(\frac{\pi}{k} + \delta\right) = \theta$. Da $\delta < \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)$ und $k \geqq 3$ war, ist $0 < \theta < 1$. Weiter hat man der Reihe nach

$$\begin{aligned} \mid A - \sigma_1 \mid &\leqq \mid A \mid \theta + \quad \mid b'_{k_1} \mid \\ \mid A - \sigma_2 \mid &\leqq \mid A - \sigma_1 \mid \theta + \mid b'_{k_2} \mid \\ \mid A - \sigma_3 \mid &\leqq \mid A - \sigma_2 \mid \theta + \mid b'_{k_3} \mid \text{ usw.} \end{aligned}$$

Sei $b'_\mu = \underset{j \geqq \mu}{Max} \mid b'_{k_j} \mid$. Dann ist

$$\mid A - \sigma_{\mu+\nu} \mid \leqq \mid A - \sigma_\mu \mid \theta^\nu + b'_\mu \frac{\theta^\nu - 1}{\theta - 1},$$

wie man erkennt, wenn man die $(\mu + \nu)$-te der obigen Ungleichungen in die $(\mu + \nu - 1)$-te einsetzt, das Resultat dann in die $(\mu + \nu - 2)$-te einsetzt und so bis zur μ-ten fortfährt. Daraus folgt $\mid A - \sigma_n \mid \to 0$ mit $n \to \infty$. Weil die Partialsummen vom Index ν mit $n_{n_{k_{j-1}}} < \nu < n_{k_j}$ immer im Deltoid D_j liegen, streben nicht nur die $s_{n_{k_j}} \to A$, sondern auch die anderen „dazwischenliegenden" Teilsummen, w. z. z. w.

Es wäre noch zu bemerken, daß man bei dem erwähnten Satz von *H. Hornich* die Teilsumme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ auf k^n verschiedene Arten abändern kann ($k \geqq 3$), während man bei dem eben bewiesenen Satz offenbar mit 2^n Möglichkeiten auskommt.

Buchbesprechungen.

Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Zum Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Von *K. Wolf.* Zweite, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 250 Textabb., IX, 370 S. Wien: Springer-Verlag, 1947. In Österreich: geb. S 54.—. Im Ausland: geb. sfr 32.—.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich durch die Aufnahme zweier größerer, ausführlich durchgerechneter technischer Beispiele, von denen das erste (S. 184—189) die Resonanzschwingungen bei der Landung eines Flugzeugs, das andere (S. 350—354) die Bewegung eines Katapultsitzes beim Herausschleudern aus einem Flugzeug betrifft. Auch ist die Zahl der Aufgaben vermehrt worden, wodurch das Buch an Brauchbarkeit für die Studierenden sicher noch gewonnen hat. Bei dem heutigen Mangel an Lehrbüchern ist es wohl überflüssig, dem inhaltreichen, gut geschriebenen und vom Verlag friedensmäßig ausgestatteten Werk noch besondere Erfolgswünsche auf den Weg zu geben.

J. Radon, Wien

Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis. Von *A. Fischer.* VI, 240 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. In Österreich: S 30.—. Im Ausland: sfr 18.—.

Der Verfasser stellt dem Menschen „innerhalb des Biologischen" den Menschen „jenseits des Biologischen" gegenüber und spricht neben einer biologischen Erkenntnistheorie von einem transzendenten Wissensdrang des Menschen. Das Unbefriedigende und Unklare dieses Dualismus scheint der Verfasser selbst zu fühlen, da er von der Zwitternatur des menschlichen Geistes spricht (S. 10). In dem Kapitel über die logischen Grundlagen der Erkenntnis vermissen wir eine ausführlichere Auseinandersetzung mit der Grundlegung der Mathematik, mit Logik und Sprache, die doch eine zentrale Stellung in dem vom Verfasser behandelten Fragenkreis innehaben. Hilberts Formalismus, der Intuitionismus werden kurz gestreift, nicht viel ausführlicher der Logizismus behandelt, die zahlreichen Probleme und Schwierigkeiten in diesen Systemen, die neueren Arbeiten dazu nicht erwähnt (z. B. wird das Unendlichkeitsaxiom mit seiner grundlegenden Wichtigkeit gerade für das Thema dieses Buches überhaupt nicht genannt). Hier ist auch das Literaturverzeichnis sehr unvollständig. Unter diesen Umständen ist das Buch für den Mathematiker als unzulänglich zu bezeichnen.

H. Hornich, Wien

Die Mathematik des Natufforschers und Ingenieurs. Von *B. Baule.* Zürich: S. Hirzel. 1947.

Band I: Differential- und Integralrechnung. Fünfte Auflage. Mit 161 Textabb., VIII, 153 S. S 14.—.

Nach einer ausführlichen Behandlung des Funktionsbegriffes wird die Differentialrechnung für Funktionen von einer Veränderlichen entwickelt. Darauf folgen Anwendungen auf die Geometrie. Dann kommt die Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen und schließlich die

Integralrechnung. Man darf das Buch nicht mit den Augen eines strengen Mathematikers betrachten und feststellen, daß vieles nicht exakt abgeleitet wird. Wie schon der Titel sagt, ist das Buch in erster Linie für den Physiker, den Chemiker und den Ingenieur geschrieben. Für diese bringt es das, was sie brauchen. Was nur den reinen Mathematiker interessiert, ist weggelassen. Die Darstellung ist dem naturwissenschaftlichen Denken angepaßt; logische Strenge, soweit sie dort erforderlich ist, starke Betonung des Anschaulichen und der Anwendungen. Zahlreiche Beispiele zwingen den Leser, den Stoff gründlich durchzuarbeiten, und geben ihm die Möglichkeit, auch mit der Theorie etwas anzufangen.

Band II: Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Mit 30 Textabb., II, S. 154—206. S 7.—.

Dieser Band behandelt meist Probleme der angewandten Mathematik. Er bringt die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Fehlerverteilungsgesetze von Gauß und Poisson, die Darstellung von Kurven durch einfachere Kurven, Fourier-Reihen und Fourier-Integrale, Legendre'sche Polynome und die Interpolationsformeln von Newton und Lagrange. Gerade hier in der angewandten Mathematik erweist es sich als besonders wertvoll, daß zahlreiche Beispiele durchgerechnet werden. Die vielen Abbildungen erleichtern das Verständnis. Die Auswahl und die Darstellung des Stoffes ist vorbildlich.

Band III: Analytische Geometrie. Mit 89 Textabb., II, S. 207—284. S 8.50.

Dieser Band beginnt mit der Vektoralgebra, erläutert das Rechnen mit Determinanten, Matrizen und linearen Gleichungen. Es folgen die Gebilde erster und zweiter Ordnung (Gerade, Ebene, Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung). Zuletzt steht ein kurzer Abschnitt über projektive Geometrie. In 80 Seiten wird so dem Leser das Wichtigste aus der linearen Algebra und aus der analytischen Geometrie geboten. Die Darstellung ist zwar etwas knapp, aber sehr anschaulich und lebendig. „Flächenprodukte" und „Raumprodukte" sind sehr zweckmäßig. Mit dem Begriff der Matrix verfährt der Verfasser sehr großzügig.

Band IV: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mit 41 Textabb., II, S. 285—394. S 11.50.

Zunächst werden die verschiedenen Arten von Lösungen diskutiert. Dann folgen zahlreiche Lösungsmethoden (Trennung der Veränderlichen, Variation der Konstanten, die Transformationen von Laplace und Legendre, Näherungsmethoden). Hierauf werden alle einfachen Typen von Differentialgleichungen behandelt, wie die Differentialgleichung von Bernoulli, Jacobi, Euler. Ausführlich werden Differentialgleichungen 2. Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen — beide — mit konstanten Koeffizienten erörtert. Mehr als ein Drittel des Bandes ist der analytischen Mechanik gewidmet (Schwingungen, Bewegungsgleichungen, das Potential einer Kraft, die Integralsätze von Gauß, Stokes und Green). Man suche keine Existenzbeweise! Das Buch ist in erster Linie für den angewandten Mathematiker geschrieben und für ihn ist es ein vorzügliches Lehrbuch.

Band V: Variationsrechnung. Mit 15 Textabb., II, 48 S. S 5.50.

Das Heft stellt eine geradezu ideale Einführung in die Variationsrechnung dar. Auf 48 Seiten führt es in einer glänzend geschriebenen Darstellung in die grundlegenden Variationsprobleme ein und bringt zuletzt eine Reihe von

Tatsachen, die für die theoretische Physik und insbesondere für die Relativitätstheorie von Wichtigkeit sind. Ich nenne die Riemann'sche Geometrie, insbesondere Krümmung eines Raumes, Riemann'scher Krümmungstensor; ferner Bewegungsgleichungen und die Variationsprinzipe von Hamilton und Jacobi.

Band VI: Partielle Differentialgleichungen. Dritte Auflage. Mit 84 Textabb., II, 160 S. S 16.—.

Auf sehr anschauliche Art werden die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Ausführlich — da in den Anwendungen wichtiger — werden partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Es werden die bekannten Methoden entwickelt wie Trennung der Veränderlichen, Transformation auf Normalformen, Ansatz durch Exponentialfunktionen, Laplacetransformationen, Methode von d'Alembert, Methode von Bernoulli und Euler. Einen breiten Raum nehmen die Anwendungen ein (Wärmeleitung, schwingende Saite, schwingende Membran, Wellengleichung, Zylinder- und Kugelfunktionen, Potentialströmungen). Von letzteren ausgehend werden komplexe Funktionen betrachtet. Hierauf werden die Hauptsätze der Funktionentheorie entwickelt. Die vielen Beispiele — meist aus den Anwendungen — machen auch die Funktionentheorie dem angewandten Mathematiker leichter verständlich. Wie schon aus dieser Inhaltsübersicht hervorgeht, ist auch dieser Band für den Mathematiker, den Physiker und Ingenieur von großem Wert.

Band VII: Differentialgeometrie. Dritte Auflage. Mit 88 Textabb., II, 148 S. S 16.—.

Dieser Band enthält die wichtigsten Ergebnisse der Kurven- und Flächentheorie, also begleitendes Dreikant, Fresnel'sche Formeln, geodätische Linien, Asymptotenlinien, Krümmungslinien, Normalschnitte und schiefe Schnitte, Krümmung, Nichteuklidische Geometrie, Abbildung zweier Flächen aufeinander. Dann folgen sehr hübsche Anwendungen auf Probleme der Festigkeitslehre, auf Spannungen im allgemeinen und speziell auf Spannungen in Schalen. Klare, anschauliche Darstellung zeichnet auch diesen Band aus.

Zusammenfassend möge festgestellt werden: Der Verfasser hat auf 750 Seiten seine „Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs" entwickelt. Er hat damit einen guten Überblick über das weite mathematische Land gegeben. Nun kann der reine Mathematiker weiter in jene Teile der Mathematik eindringen, die ihm ein tieferes und exaktes Wissen vermitteln, der angewandte Mathematiker aber bringt die nötigen mathematischen Kenntnisse mit, um die verschiedenen Probleme der Naturforschung und Technik verstehen und angreifen zu können. Immer wieder merkt man, daß der Autor nicht nur über umfassendes Wissen verfügt, sondern auch ein genialer Lehrer ist, der die richtige Auswahl des Stoffes trifft und in klarer, anschaulicher Weise die schwierigen mathematischen Probleme dem Leser verständlich macht. Die Bücher sind den Studierenden der Naturwissenschaften und der Technik, besonders aber auch den Mathematikern wärmstens zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien

Projektive Geometrie. Von *W. Blaschke.* (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaft) 160 S. Wolfenbüttel: Wolfenbüttler-Verlagsanstalt. 1947. RM 13.—.

Wenn einer der hervorragendsten Geometer ein Buch über Projektive Geometrie vorlegt, so wird man eine interessante und neuartige Darstellung

des Gegenstandes erwarten. Diese Erwartungen werden in keiner Weise enttäuscht. Die Projektive Geometrie stand im 19. Jahrhundert im Mittelpunkt des Interesses. In neuerer Zeit ist der geometrische Inhalt gegenüber dem algebraischen Aufbau in Hintergrund getreten. Dem Verfasser gelingt es unter Heranziehung aller modernen Methoden den geometrischen Reichtum, welcher in den vergangenen Jahrhunderten angehäuft wurde, in knapper und origineller Art unter Benützung eigener Forschungen darzustellen und zu vermitteln. Auf die historische Entwicklung und die Verknüpfung mit anderen Zweigen der Mathematik wird besonderer Nachdruck gelegt. Dabei werden die neuesten Forschungen der letzten Jahre berücksichtigt. Von jedem Mathematiker werden die biographischen Daten gegeben. Besonders wichtige Sätze werden mit mehreren Beweisen versehen. Ungemein reizvoll ist das Kapitel über die Möbius'schen Vierflache. Es soll nun eine kurze Inhaltsangabe gegeben werden: I. Einleitung, II. Homogene Zeiger, Kollineationen, Korrelationen, III. Doppelverhältnis, Staudt's Hauptsatz, IV. Kegelschnitt (hier seien hervorgehoben: Die Bemerkungen zum Satz von Desargues, die Beweise des Satzes von Pascal, der Satz von Serret, das Hesse'sche Übertragungsprinzip, die kinematische Abbildung von Blaschke und Grünwald, die Begriffe inpolar und umpolar), V. Liniengeometrie, VI. Quadriken (interessant das räumliche Gegenstück zur Dreiecksfigur von Desargues), VII. Nichteuklidische Geometrie (die Verwendung der Fubini-Study'schen Abbildung und der Quaternionen ermöglicht es dem Verfasser den Gegenstand gründlich zu behandeln. Interessant ist die Verbindung mit der desmischen Figur von Poncelet und Stephanos und den Möbius'schen Kreisverwandtschaften), VIII. Vierflachpaare von Möbius (diese Figur wird eingehend untersucht. Ebenso die Konfiguration von Kummer und Klein).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das vorliegende interessante Werk das Ziel erreichen wird, welches dem Verfasser vorschwebt, nämlich „diesen Schatz geometrischer Schönheit über unsere Zeit hinweg zu retten".

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII, Gentzgasse 53. - Druck: Tiroler Graphik Ges. m. b. H. Innsbruck, Innrain 27—29. - Papierzuweisung: 101/48/1/58.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Im Sommer 1948 erscheint:

Integraltafel

Von

W. Gröbner
Professor an der Universität Innsbruck

N. Hofreiter
Professor an der Universität Wien

I. Teil: Unbestimmte Integrale

Mit etwa 180 Seiten. Format: 30×22 cm

Der Zweck der Integraltafel ist, den Mathematikern, Physikern und Ingenieuren zeitraubende Ausrechnungen von Integralformeln zu ersparen und einen kurzen Überblick über alle in den einzelnen Fällen brauchbaren Methoden zu geben.

In Vorbereitung:

II. Teil: Bestimmte Integrale

Mathematik, Logik und Erfahrung

Von

Univ.-Professor Dr. **V. Kraft**, Wien

VIII, 129 Seiten. 1947

In Österreich S 18.—, im Ausland sfr 10.—

Inhaltsverzeichnis: Die empirische Geltung der Mathematik. A. Die empirische Geltung der Arithmetik. 1. Die natürlichen Zahlen. 2. Die Grundrechnungsarten. 3. Die erweiterten Zahlen. 4. Das Rechnen mit erweiterten Zahlen. B. Die empirische Geltung der Geometrie. 1. Die rein mathematische Geometrie. 2. Die Bedingungen für die Anwendung einer Geometrie. 3. Der Konventionalismus und seine Widerlegung. a) Die Grundlagen der Messung. b) Die Grundlagen der Zuordnung. c) Geometrie als Voraussetzung der Messung. 4. Die notwendige Anwendbarkeit einer Geometrie. Widerlegung des Konventionalismus. 1. Der Konventionalismus. 2. Festsetzung – Erfahrung. 3. Die Bedingungen der Messung. 4. die Festsetzbarkeit von Naturgesetzen. 5. Die Verschiedenheit von Gesetzen bei Festsetzung der Messungsgrundlagen. 6. Die Bestimmtheit der Naturgesetze durch die Erfahrung. Die Anwendungsbedingungen der Logik. 1. Die logischen Gesetze nicht Seins-Gesetze. 2. Die Unabhängigkeit der Logik von der Wahrheit. 3. Die Logik als Ordnungsbeziehungen auf Grund von Festsetzungen. 4. Die Anwendungsbedingungen der Logik.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria.